TEMA 1 – LOS NÚMEROS REALES

1.1 – LOS NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

INTRODUCCIÓN:

Los **números racionales:**

- Se caracterizan porque pueden expresarse:
  - En forma de ***fracción***, es decir, como cociente de dos números enteros: $x \in Q \Leftrightarrow a, b \in Z$ tales que $x = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$
  - En forma ***decimal***: O bien son enteros o bien tienen expresión decimal **finita o periódica.**
- El conjunto de todos los números racionales se designa por **Q**. El conjunto **Q es denso en R** (al situar todos los números racionales sobre la recta numérica la ocupan densamente). Esto quiere decir: Entre dos números racionales hay infinitos números racionales. (si $x_1, x_2 \in Q \Rightarrow$ El punto medio: $\frac{x_1 + x_2}{2} \in Q$)

No obstante, en la recta numérica hay infinitos puntos no ocupados por números racionales. A cada uno de estos puntos le corresponde un número irracional.

Los **número irracionales:**

- Se caracterizan porque:
  - **No pueden expresarse en forma de fracción.**
  - **Su expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas.**
- El conjunto de todos los números irracionales se designa por **I**.

Tanto los números racionales como los irracionales se llaman **números reales**. El conjunto de los números reales se designa por **R**. Los números reales llenan la recta numérica por eso se la llama **recta real.**

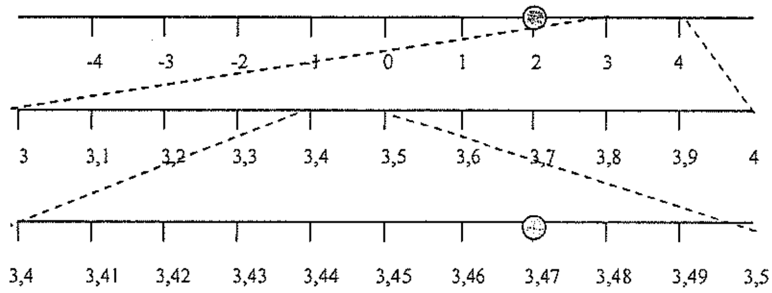
ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

- REALES (R)
  - RACIONALES (Q)
    - ENTEROS (Z)
      - NATURALES (N) $\Rightarrow 0; 4; \frac{24}{6}; \sqrt{81}$.....
      - ENTEROS NO NATURALES (Enteros negativos) $\Rightarrow -11; \frac{-24}{4}; \sqrt[3]{-8}$....
    - FRACCIONARIOS (Racionales no enteros)
      - Fracciones: $\frac{3}{4}, \frac{-5}{8}$...
      - Números decimales
        - Exactos: 0,31;...
        - Periódicos
          - Puros: $7,\widehat{1}$;...
          - Mixtos: $7,3\widehat{1}$,...
  - IRRACIONALES (I) $\Rightarrow \sqrt{2}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{5}; \pi$, decimales no periódicos.....

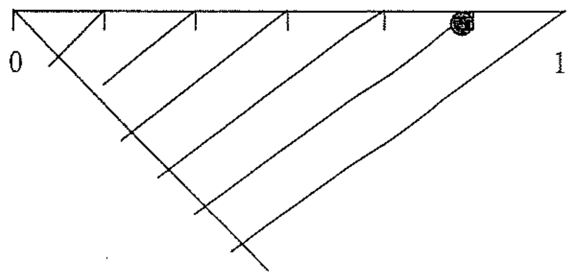
REPRESENTACIÓN SOBRE LA RECTA

La representación de un número real sobre la recta se hará de un modo u otro según el tipo de número que sea:

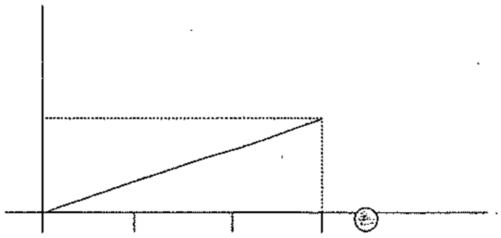
- **Entero o decimal exacto:** 2;



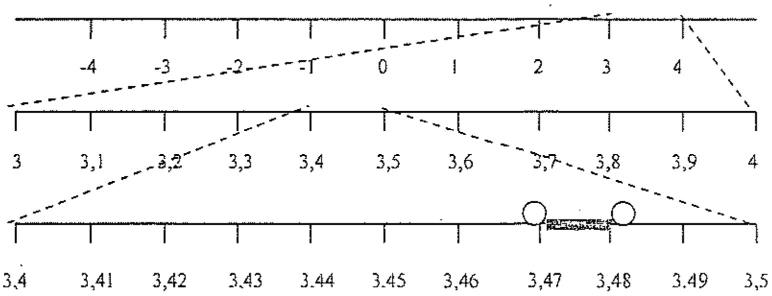
- **Decimal periódico**: Puede expresarse en forma de *fracción* y, de este modo, se representa dividiendo cada unidad entre las partes que tenga el denominador y tomando tantas de esas partes como indique el numerador: **5/6**, -8/5



- **Racional cuadrático**: Construyendo triángulos rectángulos y teniendo el cuenta el teorema de Pitágoras: $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{10}$

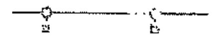
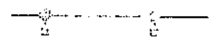
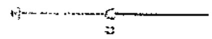
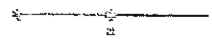
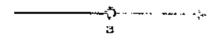
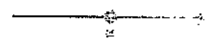


- **Números decimales periódicos o no periódicos** : Se representan de forma aproximada mediante un intervalo de valores: 3,47484950.... ≈ 3,47...



INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

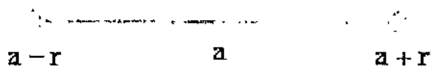
Sirven para expresar tramos de la recta real

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	$\{ x / a < x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b	
Intervalo cerrado	[a,b]	$\{ x / a \le x \le b \}$ Nº comprendidos entre a y b, éstos incluidos.	
Intervalo semiabierto	(a,b]	$\{ x / a < x \le b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido b	
	[a,b)	$\{ x / a \le x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido a	
Semirrecta	(-∞,a)	$\{ x / x < a \}$ Números menores que a	
	(-∞,a]	$\{ x / x \le a \}$ Nº menores o iguales que a	
	(a,∞)	$\{ x / a < x \}$ Números mayores que a	
	[a,∞)	$\{ x / a \le x \}$ Nº mayores o iguales que a	

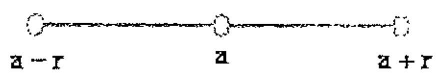
Nota : Si queremos nombrar un conjunto de puntos formados por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo $\cup$ (unión) entre ellos.

ENTORNOS

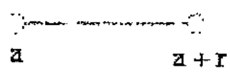
Se llama **entorno de centro a y radio r** y se designa E(a,r) al conjunto de puntos (a–r , a+r)



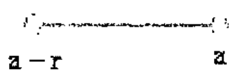
Se llama **entorno reducido de centro a y radio r** y se designa $E^*(a,r)$ al entorno E(a,r) menos el centro(a): $E^*(a,r) = (a - r, a + r) - \{a\}$



Se llama **entorno por la derecha de centro a y radio r** y se designa $E^+(a,r) = (a, a + r)$



Se llama **entorno por la izquierda de centro a y radio r** y se designa $E^-(a,r) = (a - r, a)$



1.2 – VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

DEFINICIÓN

El **valor absoluto de un número real**, a, es el propio número a, si es positivo, o su opuesto, -a, si es negativo: $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

(Es decir, consiste en convertirlo en positivo)

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos "a" y "b" es su diferencia en valor absoluto: $|a - b|$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

- $|x - a| = b \Rightarrow \begin{cases} x - a = b \Rightarrow x = a + b \\ x - a = -b \Rightarrow x = a - b \end{cases} \Rightarrow \{a-b, a+b\}$ (Dos puntos concretos)
- $|x - a| < b \Rightarrow \begin{cases} x - a = b \Rightarrow x = a + b \\ x - a = -b \Rightarrow x = a - b \end{cases} \Rightarrow (a-b, a+b)$ (El interior)
- $|x - a| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x - a = b \Rightarrow x = a + b \\ x - a = -b \Rightarrow x = a - b \end{cases} \Rightarrow (-\infty, a-b] \cup [a+b, +\infty)$ (El exterior)

1.3 – RADICALES. PROPIEDADES

DEFINICIÓN DE RAIZ N-ÉSIMA

Se llama **raíz n-ésima** de un número a y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, a **radicando** y n **índice** de la raíz.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n
Si $a < 0$, sólo existe su raíz de índice impar.

FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

Forma exponencial de radicales $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$ (Para simplificar radicales o reducir a común índice)
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

OPERACIONES CON RADICALES

- **Suma y resta de radicales** : Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Sólo puede sumarse radicales idénticos.

- **Producto y cociente de radicales** : Para poder multiplicar o dividir dos radicales deben tener el mismo índice en la raíz, es decir, debemos expresarlas con el m.c.m de sus índices. (Aplicar propiedades 1 y 4 del apartado anterior).

- **Racionalización de denominadores** : A veces conviene suprimir las raíces del denominador. Para ello hay que multiplicarlo por la expresión adecuada. Naturalmente, el numerador también se multiplicará por esa misma expresión.

  - Para suprimir una raíz cuadrada (aunque esté multiplicada por un número), basta multiplicar numerador y denominador por dicha raíz.
  - Para suprimir una raíz n-ésima (aunque esté multiplicada por un número), se multiplica numerador y denominador por otra raíz n-ésima tal que se complete en el radicando una potencia n-ésima.
  - En una suma de raíces cuadradas, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, se suprimen los radicales multiplicando por el conjugado $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ y viceversa.

1.4 – LOGARITMOS

LOGARITMOS EN BASE CUALQUIERA

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama **logaritmo en base a** de p, y se designa $\log_a p$, al exponente al que hay que elevar la base a para obtener p. $\log_a p = x \Leftrightarrow a^x = p$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- El logaritmo de la base es 1 : $\log_a a = 1$
- El logaritmo de 1 es 0 : $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia: $\log_a p^n = n.\log_a p$
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos:
  $\log_a (p.q) = \log_a p + \log_a q$
- El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos:
  $\log_a (p/q) = \log_a p - \log_a q$
- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice :
  $\log_a \sqrt[n]{p} = \dfrac{\log_a p}{n}$
- **Cambio de base** : El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos de logaritmos decimales. $\log_a p = \dfrac{\log_c p}{\log_c a}$

ALGUNOS LOGARITMOS IMPORTANTES

Se llama **logaritmo decimal** de un número p y se designa por **log p**, al exponente al que hay que elevar el 10 para obtener p.

$$\log p = x \Leftrightarrow 10^x = p$$

La tecla "log" nos da el logaritmo decimal del número que escribamos en la pantalla a continuación.

Se llama **logaritmo neperiano** de un número p y se designa por **Ln p**, al exponente al que hay que elevar el número e para obtener p.

$$\text{Ln } p = x \Leftrightarrow e^x = p$$

La tecla "Ln" nos da el logaritmo neperiano del número que escribamos en la pantalla a continuación.

Un logaritmo en otra base "a" cualquiera (distinta de 10 o e) se puede obtener a partir de logaritmos de logaritmos en cualquier base (c) (En particular, base 10 o base e).

$$\log_a p = \frac{\log_c p}{\log_c a} = \frac{\log p}{\log a} = \frac{Ln\,p}{Ln\,a}$$

1.5 – EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS.

EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES. ERRORES Y COTAS

Al expresar un número real con muchas o infinitas cifras decimales, utilizamos expresiones decimales aproximadas, es decir, recurrimos al redondeo. Al realizar estas aproximaciones cometemos errores.

Error absoluto = |Valor real – Valor de medición|

Error relativo = $\dfrac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$

Cotas de los errores: Números mayores o iguales que el valor absoluto de los errores:
$|\text{Error Absoluto}| \leq k$ $|\text{Error relativo}| \leq k'$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cuando utilizamos los números decimales para expresar mediciones concretas, se deben dar con una cantidad adecuada de cifras significativas.

Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Sólo de deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste.

El error absoluto suele ser menor que 5 unidades del lugar siguiente al de la última cifra significativa utilizada.

El error relativo es tanto menor, cuanto más cifras significativas se utilicen.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica se utiliza para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de :
- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero(la de las unidades)
- El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a\,,\,bcd\ldots\ldots \times 10^{n}$$

a = Parte entera (sólo una cifra)
bcd..... = Parte decimal
10^n = Potencia entera de base 10

Si n es positivo, el número N es "grande"
Si n es negativo, el número N es "pequeño"

Operaciones con números en notación científica

El producto y el cociente son inmediatos, teniendo en cuenta:
$10^b . 10^c = 10^{b+c}$ $\qquad$ $10^b : 10^c = 10^{b-c}$

En sumas y en restas hay que preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10

Calculadora para la notación científica

- **Interpretación** : 5.74901^{09} significa $5,74901 \times 10^9$
- **Escritura**: $5,74901 \times 10^9 \Rightarrow$ 5,74901 EXP 9
  $2,94 \times 10^{-13} \Rightarrow$ 2,94 EXP 13 ±
- **Modo científico (SCI)** : Hace que la calculadora trabaje siempre con números en notación científica y, además, con la cantidad de cifras significativas que previamente le hayamos indicado. (MODE 8 4 $\Rightarrow 0.000^{00}$) Para volver a modo normal MODE 9 .

TEMA 1 – LOS NÚMEROS REALES

- **Clasificación y representación de números reales**

EJERCICIO 1 : Clasificar y representar los siguientes números: -2; 3; -4/5; 4/2; $-\sqrt{25}$; $-\sqrt{26}$; $4,3\bar{1}$; 1,01001….; $\sqrt[3]{-125}$; $\pi - 2$

EJERCICIO 2 :Clasifica y representa los siguientes números: -7/3;$-\sqrt[3]{27}$;2,34; $\sqrt{6}$; -2,34....; $\sqrt{21}$; 5/4

- **Operar con números decimales. Paso a fracción**

EJERCICIO 3 : Calcula : $1,4\hat{2} - 3,\hat{4} + 2,7$

- **Intervalos y semirrectas. Valores absolutos**

EJERCICIO 4 : Cambiar de notación (tipo de intervalo, significado, representación...) los siguientes intervalos y semirrectas:

a) [3,5)

b) 

c) "Números menores que 7"

d) $\{x \in R \,/\, x \geq 2\}$

e) E(2,5)

f) E*(2,5)

g) $E^{+}(2,5)$

h) $E^{-}(2,5)$

EJERCICIO 5 : Expresa de todas las formas posibles los siguientes intervalos y semirrectas:

a) $|x-3| \leq 4$ b) $|x+2| > 3$

- **Radicales. Propiedades y operaciones. Racionalizar**

EJERCICIO 6 : Realizar las siguientes operaciones con radicales:

a) $5\sqrt[4]{2} + 7\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[4]{32} + 13\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{1875}$

b) $\sqrt{\dfrac{x^2y^3}{z}} : \sqrt[3]{\dfrac{x^6y}{z^2}}$

c) $\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5^2}}}$

e) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{3}$

f) $(2+\sqrt{2})^2 - (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$

g) $\dfrac{2}{5\sqrt[3]{2}}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}-2}$

i) $2.\sqrt{\dfrac{3}{4}} - \sqrt{27} + \dfrac{1}{4}\sqrt{12} - 3\sqrt{\dfrac{75}{9}}$

j) $\sqrt[3]{a^{-2}}.\sqrt[6]{a^4}.\sqrt[4]{a^{-3}}.\sqrt[5]{a^3}$

k) $7\sqrt{150} - 3\sqrt{18} + \sqrt{24} - 5\sqrt{8} - \sqrt{6}$

l) $\dfrac{5\sqrt{a^3b^4}\sqrt[6]{a^2b^3c^3}}{\sqrt[3]{a}}$

m) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt[5]{4}}$

n) $\dfrac{5}{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

ñ) $\sqrt{\dfrac{15}{135}}.\sqrt[3]{\dfrac{12}{10}}$

o) $\sqrt{147} - 2\sqrt[3]{81}$

p) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$

q) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{8x^2y}{z}} : \sqrt[3]{\dfrac{16xy^2}{z}}}{\sqrt{\dfrac{16xy^2}{z}.\sqrt[3]{\dfrac{8x^2y}{z}}}}.\sqrt[6]{\dfrac{2y}{x}}$

r) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

s) $-\dfrac{7}{3}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{375} - \left(\sqrt[3]{81} - \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{192}\right)$

t) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4.(a^2\sqrt{a})^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

u) $\sqrt{75} - \dfrac{\sqrt{18}}{3} + \dfrac{3\sqrt{12}}{4} - \sqrt{\dfrac{2}{25}}$

v) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$

w) $3\sqrt[3]{81ab^6} + 5\sqrt[3]{3a^4b^3} - 11\sqrt[3]{24a^7}$

x) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2y^3}{z}} : \sqrt{\dfrac{xy}{z}}$

y) $\dfrac{10}{\sqrt[5]{128}}$

z) $\dfrac{3}{2\sqrt[5]{27}}$

1) $\sqrt[3]{a^6\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{30}}}}$

2) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}.\sqrt[3]{2}}$

3) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}.(\sqrt{125}+2)}$

- **Logaritmos. Propiedades y operaciones.**

EJERCICIO 7 : Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $\log_3 x = 2$ b) $\log_{1/2} 32 = x$ c) $\log_5 45 = x$ d) $2.\log(x+3) + \log 2 = \log(3x^2 + 5)$

EJERCICIO 8 : Sabiendo que log 2 = 0,30103... halla:
a) $\log 0{,}25$ b) $\log 512$ c) $\log \sqrt[3]{0{,}02}$ d) $\log\left(1/\sqrt[3]{16}\right)$

EJERCICIO 9 : Utiliza las propiedades de los logaritmos para calcular el valor de las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que $\log k = 1{,}2$: a) $\log\frac{\sqrt[4]{k}}{1000}$ b) $\log(100.k^3)$

EJERCICIO 10 : Expresa como un solo logaritmo la siguiente expresión, utilizando las propiedades de los logaritmos: $3\log 2 + \log 5 + \log\frac{1}{25} - \log 4$

EJERCICIO 11 : Sabiendo que log x = 0,85, calcular $\log(100x) - \log\frac{\sqrt[3]{x}}{1000}$

EJERCICIO 12 : Hallar el valor de la siguiente expresión: $\log_4 16 + \log_2 \sqrt{32} - \log_5 1 + \log_2 32$

EJERCICIO 13 : Sabiendo que log x = 2, log y = 3 , log z = -1, calcular $\log\frac{x^3.3y}{\sqrt{z}}$

EJERCICIO 14 : Si sabemos que $\log x = 0{,}9$, calcula: $\log\frac{x^3}{100} - \log\left(100\sqrt{x}\right)$

- **Errores y cotas**

EJERCICIO 15 : Calcula los errores cometidos y cotas para dichos errores al redondear el número 2,387 a las centésimas.

EJERCICIO 16 : Calcula los errores y cotas para dichos errores al redondear $\sqrt{2}$ a las décimas.

EJERCICIO 17 : La población de un pueblo, redondeada a las decenas es de 310 habitantes. Indica los errores cometidos y cotas para dichos errores.

EJERCICIO 18 : Si aproximamos 10,469 por 10,5, ¿Qué error absoluto se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es mejor aproximación? Razónalo.

- **Notación científica**

EJERCICIO 19 : Expresar en notación científica:
a) 57 billones b) 623 cienmilésimas c) 0,035 millones

EJERCICIO 20 : Calcular, sin calculadora, dando el resultado en notación científica con tres cifras significativas:

a) $\frac{5{,}433.10^3 - 4{,}3.10^3 + 23{,}2.10^2}{8{,}5.10^{-3} - 456.10^{-5}}$ b) $\frac{(2{,}63.10^{-5} + 86.10^{-6}).(3.10^4)}{2{,}93.10^9}$ c) $\frac{3{,}7.10^{12} - 4{,}2.10^{11} + 28.10^{10}}{1{,}2.10^{-4}}$

d) $\frac{3{,}7.10^{12} - 4{,}2.10^{11} + 28.10^{10}}{1{,}2.10^{-4} + 5.10^{-3}}$ e) $\frac{(2{,}63.10^8 + 8{,}6.10^7).(4.10^4)}{3{,}4.10^{-2} + 7{,}45.10^{-4}}$ f) $\frac{3.10^2\left(4{,}5.10^5 - 3{,}56.10^3\right)^2}{12{,}34.10^{-3} + 7{,}03.10^{-5}}$

Radicales

Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

1) $\sqrt{18}$

2) $3\cdot\sqrt{48}$

3) $\sqrt[3]{16}$

4) $\sqrt{9a^3}$

5) $\sqrt{50a^2b}$

6) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

7) $2\cdot\sqrt{75x^4y^5}$

8) $3\cdot\sqrt{81x^3y^4}$

9) $\frac{1}{7}\cdot\sqrt{49x^3y^7}$

10) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{108a^5b^7}$

11) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{27a^5m^7}$

12) $\frac{3}{5}\cdot\sqrt{125mn^4}$

13) $2a\cdot\sqrt{44a^3b^7c^9}$

14) $2\cdot\sqrt[3]{16x^2y^7}$

15) $4\cdot\sqrt[3]{250a^5b^8}$

16) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{128}$

17) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{27m^7n^8}$

18) $2xy\cdot\sqrt[3]{128x^2y^8}$

19) $5a\cdot\sqrt[3]{160x^7y^9z^{13}}$

20) $2\cdot\sqrt[4]{243}$

21) $\sqrt[4]{20a^4b^5c^{12}}$

22) $3\cdot\sqrt[4]{5x^8y^{14}z^{16}}$

23) $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[4]{32mn^8}$

24) $\sqrt{\frac{27a^4m^3n^2}{392b^9c^2}}$

25) $6\cdot\sqrt{\frac{5a^3}{24x^2}}$

26) $5\cdot\sqrt{\frac{9n^3}{5m^2}}$

27) $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{4a^2}{27y^3}}$

28) $2b^2\cdot\sqrt[3]{\frac{125}{4b^5}}$

29) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{27x^4}{16a^2b^4}}$

30) $2xy\cdot\sqrt[4]{\frac{81a^9}{4x^5y^{12}}}$

Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él:

1) $3 \cdot \sqrt{5}$
2) $2 \cdot \sqrt{3}$
3) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$
4) $2 \cdot \sqrt{a}$
5) $5a \cdot \sqrt{b}$
6) $3a \cdot \sqrt{2a^2}$
7) $3a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2b}$
8) $5x^2y \cdot \sqrt{3}$
9) $ab^2 \cdot \sqrt[3]{a^2b}$
10) $4m \cdot \sqrt[3]{2m^2}$
11) $2a \cdot \sqrt[4]{8ab^3}$
12) $4a \cdot \sqrt{2xy}$
13) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{8}$
14) $5a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$
15) $\frac{1}{10} a^2m^3 \cdot \sqrt[3]{axm^3}$
16) $\frac{1}{2} a^{-2}b \cdot \sqrt[3]{4abx}$
17) $\frac{1}{10} a^3x^2b \cdot \sqrt[3]{1.000a^5bx^3}$
18) $a^{-5}x^{-1} \cdot \sqrt{a^3x^{-2}}$
19) $3n^3p \cdot \sqrt[4]{2m}$
20) $5xy^5 \cdot \sqrt{x^3y}$
21) $20a^3b^2 \cdot \sqrt[3]{2b^2}$
22) $7b^2 \cdot \sqrt[3]{3a}$
23) $5mn^2p^3 \cdot \sqrt{2m^3np^2}$
24) $2a^2bc^3 \cdot \sqrt[3]{7c}$

Reducir al mínimo común índice los siguientes radicales:

1) $\sqrt{5}\ ;\ \sqrt[4]{3}$
2) $\sqrt[3]{4}\ ;\ \sqrt[4]{8}\ ;\ \sqrt{3}$
3) $\sqrt[3]{5}\ ;\ \sqrt[4]{2}\ ;\ \sqrt{3}$
4) $\sqrt[4]{3}\ ;\ \sqrt[3]{7}\ ;\ \sqrt{5}$
5) $\sqrt{3}\ ;\ \sqrt[6]{32}\ ;\ \sqrt[3]{5}$
6) $\sqrt{2}\ ;\ \sqrt[3]{3}\ ;\ \sqrt[4]{5}\ ;\ \sqrt[6]{7}$
7) $\sqrt[4]{3}\ ;\ \sqrt[5]{4}\ ;\ \sqrt{15}$
8) $\sqrt[3]{2}\ ;\ \sqrt[6]{3}\ ;\ \sqrt[9]{9}$
9) $\sqrt[3]{3x}\ ;\ \sqrt{5a^2}\ ;\ \sqrt[6]{4m}$
10) $\sqrt{5x}\ ;\ \sqrt[3]{4x^2y}\ ;\ \sqrt[6]{7a^3b}$
11) $2 \cdot \sqrt[3]{a}\ ;\ 3 \cdot \sqrt{2b}\ ;\ 4 \cdot \sqrt[4]{5x^{-2}}$
12) $\sqrt[6]{15a^3x^2}\ ;\ \sqrt{2a}\ ;\ \sqrt[3]{3a^2b}$
13) $\sqrt[4]{8a^2x^3}\ ;\ \sqrt[6]{3a^5m^4}$
14) $\sqrt{2m}\ ;\ 3 \cdot \sqrt[5]{a^3x^4}\ ;\ 2 \cdot \sqrt[10]{x^7y^2}$
15) $\sqrt[3]{2mn}\ ;\ \sqrt[5]{3m^2p}\ ;\ \sqrt[15]{5m^3p^2}$
16) $\sqrt[6]{2y^3}\ ;\ \sqrt[3]{x^2}\ ;\ \sqrt[9]{5m^7}$

Sumar los siguientes radicales indicados:
Observación: Se recuerda que ***solamente*** se puede sumar o restar radicales, si dichos radicales son ***únicamente*** semejantes.

1) $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20}$

2) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12}$

3) $\sqrt{175} + \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\cdot\sqrt{75}$

4) $\sqrt{80} - 2\cdot\sqrt{252} + 3\cdot\sqrt{405} - 3\cdot\sqrt{500}$

5) $2\cdot\sqrt{450} + 9\cdot\sqrt{12} - 7\cdot\sqrt{48} - 3\cdot\sqrt{98}$

6) $7\cdot\sqrt{450} - 4\cdot\sqrt{320} + 3\cdot\sqrt{80} - 5\cdot\sqrt{800}$

7) $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{45} + 2\cdot\sqrt{125}$

8) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{80} - \frac{1}{6}\cdot\sqrt{63} - \frac{1}{9}\cdot\sqrt{180}$

9) $5\cdot\sqrt{50} + \frac{3}{14}\cdot\sqrt{98} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{162}$

10) $2\cdot\sqrt{45} - \frac{3}{4}\cdot\sqrt{125} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{180}$

11) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{18} + \frac{3}{4}\cdot\sqrt{48} + \frac{1}{6}\cdot\sqrt{72}$

12) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{176} - \frac{2}{3}\cdot\sqrt{45} + \frac{1}{8}\cdot\sqrt{320} + \frac{1}{5}\cdot\sqrt{275}$

13) $\frac{1}{7}\cdot\sqrt{147} - \frac{1}{5}\cdot\sqrt{700} + \frac{1}{10}\cdot\sqrt{28} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2.187}$

14) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{27} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{108} - \frac{3}{5}\cdot\sqrt{300}$

15) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16}$

16) $\sqrt[3]{875} + \sqrt[3]{448} + \sqrt[3]{189}$

17) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{1.029} - \sqrt[3]{625}$

18) $3\cdot\sqrt[3]{-24} - 4\cdot\sqrt[3]{-81} - \sqrt[3]{-375}$

19) $2\cdot\sqrt[3]{250} - 4\cdot\sqrt[3]{24} - 6\cdot\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2.187}$

20) $\sqrt[3]{81} - 3\cdot\sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{686} + 2\cdot\sqrt[3]{648}$

21) $5\cdot\sqrt[3]{48} - 3\cdot\sqrt[3]{3.645} - 2\cdot\sqrt[3]{384} + 4\cdot\sqrt[3]{1.715}$

22) $4\cdot\sqrt[3]{-320} - 10\cdot\sqrt[3]{-40} - 2\cdot\sqrt[3]{-54} + 3\cdot\sqrt[3]{-1.024}$

23) $3\cdot\sqrt[3]{108} + \frac{1}{10}\cdot\sqrt[3]{625} + \frac{1}{7}\cdot\sqrt[3]{1.715} - 4\cdot\sqrt[3]{32}$

24) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{24} - \frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{54} + \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{375} - \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{128}$

25) $\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{625} - \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{192} + \frac{1}{7}\cdot\sqrt[3]{1.715} - \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{1.536}$

- Multiplicación de radicales.

Multiplicar los siguientes radicales indicados del mismo índice:

1) $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

2) $5 \cdot \sqrt{12} \times 3 \cdot \sqrt{75}$

3) $2 \cdot \sqrt{15} \times 3 \cdot \sqrt{10}$

4) $5 \cdot \sqrt{21} \times 2 \cdot \sqrt{3}$

5) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \times \frac{2}{7} \cdot \sqrt{21}$

6) $3 \cdot \sqrt{6} \times \sqrt{14} \times 2 \cdot \sqrt{35}$

7) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} \times \frac{2}{3} \cdot \sqrt{42} \times \frac{3}{7} \cdot \sqrt{22}$

8) $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{9}$

9) $\frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{15} \times 12 \cdot \sqrt[3]{50}$

10) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{4} \times \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

11) $3 \cdot \sqrt[3]{45} \times \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{15} \times 4 \cdot \sqrt[3]{20}$

12) $3 \cdot \sqrt{ab} \times 2a \cdot \sqrt{b}$

13) $x \cdot \sqrt{2a} \times \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5a}$

14) $2 \cdot \sqrt{a^2 x} \times \frac{3}{2} \cdot \sqrt{a^3}$

15) $-\frac{1}{3} x^2 \cdot \sqrt{5mn^2} \times 9x \cdot \sqrt{2m^3 n^2} \times -\sqrt{0{,}1 m^2 n^3}$

16) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3x} \times 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} x} \times 3 \cdot \sqrt{2x} \times -2 \cdot \sqrt{2x}$

17) $\sqrt[3]{9x^2 y} \times \sqrt[3]{81x^5}$

18) $\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{9a^2} \times 8 \cdot \sqrt[3]{3ab}$

19) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x^4 y^3} \times \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2xy^4} \times \sqrt[3]{4x^7 y^6}$

20) $-2 \cdot \sqrt[3]{a} \times \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{ax}$

21) $\sqrt[3]{\frac{2x^4}{25y^5}} \times \sqrt[3]{\frac{4x^5}{5y}}$

22) $5a \cdot \sqrt[7]{2mx^3} \times -3a \cdot \sqrt[7]{16m^4 x^6} \times \sqrt[7]{m^5 x}$

Multiplicar los siguientes radicales compuestos del mismo índice:

1) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}$
2) $\left(7\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}\right)\times 2\cdot\sqrt{3}$
3) $\left(2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\cdot\sqrt{2}\right)\times 4\cdot\sqrt{15}$
4) $\left(4-\sqrt{2}\right)\times\left(2+5\cdot\sqrt{2}\right)$
5) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}\right)$
6) $\left(\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
7) $\left(3\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{3}\right)\times\left(5\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{7}\right)$
8) $\left(\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}\right)\times\left(2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{3}\right)$
9) $\left(7\cdot\sqrt{5}-11\cdot\sqrt{7}\right)\times\left(5\cdot\sqrt{5}-8\cdot\sqrt{7}\right)$
10) $\left(3\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{3}\right)\times\left(4\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
11) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\times\sqrt{ab}$
12) $\left(2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\times\sqrt{x}$
13) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{2ab}\right)\times 3\cdot\sqrt{a}$
14) $\left(4\cdot\sqrt{\frac{1}{4}y}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{xy}\right)\times\sqrt{x}$
15) $\left(\sqrt{a}-2\cdot\sqrt{x}\right)\times\left(3\cdot\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)$
16) $\left(\sqrt[3]{27a^2b}+\sqrt[3]{125ab^2}\right)\times\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{a}$

Multiplicar los siguientes radicales compuestos de distinto índice:

10) $-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{abc}\times -2\cdot\sqrt[3]{bc^{-1}}\times\frac{3}{2}\cdot\sqrt{a^{-3}c^5}$
11) $\sqrt{\frac{1}{2}x^3}\times 5\cdot\sqrt[3]{3x^{-1}y^4}\times 0{,}1\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{3}x^4y^{-1}}$
12) $-0{,}1\cdot\sqrt{\frac{1}{3}a^3b^{12}}\times\sqrt[3]{3a^4b^5c^{10}}\times\sqrt{\frac{2}{3}a^7b^{14}c^{12}}$
13) $\sqrt{\frac{1}{2}x^3}\times 5\cdot\sqrt[3]{2x^{-1}y^4}\times 0{,}1\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{3}x^4y^{-4}}$
14) $\frac{9}{4}\cdot\sqrt[10]{b^5x^9y^3z^7}\times\frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{a^2x^2y^2z}\times -6\cdot\sqrt[5]{a^4b^2x^4z^3}$
15) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[9]{\frac{4}{3}a^5b^6z^3}\times -\sqrt{\frac{1}{3}ab^4c}\times 3\cdot\sqrt[6]{\frac{8}{9}a^5c^3z^4}$
16) $2\cdot\sqrt{m^3n^2p^4}\times -\frac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{m^{-2}n^4p^7}\times\frac{3}{8}\cdot\sqrt[8]{m^{-2}n^{-1}}$
17) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2y^3z}\times\sqrt[4]{3x^5y^2z^3}\times\sqrt{8xy^6z^2}$
18) $3\cdot\sqrt[5]{4m^3p^4}\times\frac{4}{5}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{2}m^{-4}p^2x^3}\times\frac{1}{6}\cdot\sqrt[10]{2mp^5x^{-2}}$

Dividir los siguientes radicales del mismo índice:

1) $4 \cdot \sqrt{6} \div 2 \cdot \sqrt{3}$

2) $2 \cdot \sqrt{50} \div 6 \cdot \sqrt{24}$

3) $20 \cdot \sqrt{2} \div 2 \cdot \sqrt{4}$

4) $12 \cdot \sqrt{3} \div 4 \cdot \sqrt{3}$

5) $\sqrt{18} \div \sqrt{25}$

6) $7 \cdot \sqrt{13} \div 28 \cdot \sqrt{26}$

7) $-9 \cdot \sqrt{8} \div \sqrt{2}$

8) $-2 \cdot \sqrt{50} \div -\sqrt{5}$

9) $\sqrt[3]{88} \div \sqrt[3]{11}$

10) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[3]{3}$

11) $2 \cdot \sqrt{3a} \div 10 \cdot \sqrt{a}$

12) $\sqrt{75x^2y^3} \div 5 \cdot \sqrt{3xy}$

13) $4x \cdot \sqrt{a^3x^2} \div 2 \cdot \sqrt{a^2x^3}$

14) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3xy} \div \frac{3}{4} \cdot \sqrt{x}$

15) $\frac{3}{5}ab \cdot \sqrt{12x^{-4}y^3z} \div -\sqrt{6x^2y^5}$

16) $3 \cdot \sqrt[3]{16a^5} \div 4 \cdot \sqrt[3]{2a^2}$

17) $2 \cdot \sqrt[3]{81x^2} \div 3 \cdot \sqrt[3]{3x^2}$

18) $-2 \cdot \sqrt[3]{5x^{11}y^{10}z^5} \div -\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{0{,}1x^{-4}y^3z^7}$

19) $\frac{2a}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2} \div \frac{a}{3x^2} \cdot \sqrt[3]{x^3}$

20) $-\frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{x^3} \div \sqrt[4]{16x^{-5}}$

21) $2 \cdot \sqrt[5]{xy} \div -3 \cdot \sqrt[5]{x^{-2}}$

22) $\sqrt[7]{ab^3c} \div -\sqrt[7]{a^2b^5}$

23) $-2 \cdot \sqrt[7]{m^5x^2} \div 4 \cdot \sqrt[7]{mx}$

24) $\frac{4}{3} \cdot \sqrt[10]{2x^5} \div \frac{3}{4} \cdot \sqrt[10]{4x^2}$

Dividir los siguientes radicales de distinto índice:

1) $\sqrt{9x} \div \sqrt[3]{3x^2}$

2) $\sqrt[3]{8a^3b} \div \sqrt[4]{4a^2}$

3) $\sqrt[3]{5m^2n} \div \sqrt[5]{m^3n^2}$

4) $\sqrt[3]{3m^4} \div \sqrt[4]{27m^2}$

5) $\sqrt[5]{18x^3y^4z^5} \div \sqrt[4]{3x^2y^2z^3}$

6) $2a \cdot \sqrt[4]{3x^2y} \div 6a^2 \cdot \sqrt[5]{x^3y^2}$

7) $\sqrt[3]{4a^2} \div \sqrt[4]{2a}$

8) $\sqrt{3x^3y^4} \div -\frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^2y^3}$

9) $\frac{4}{5} \cdot \sqrt[3]{4ab} \div \frac{1}{10} \cdot \sqrt{2a^2}$

10) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2x} \div \frac{1}{4} \cdot \sqrt[6]{16x^4}$

11) $-\sqrt[5]{\frac{4x^2y^2}{mz^5}} \div 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2y}{2mz}}$

12) $\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}x^2y^2z} \div 2 \cdot \sqrt[6]{0,4x^2y^4z^9}$

13) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[9]{a^3x^2y^{-1}} \div -\frac{2}{3} \cdot \sqrt[6]{a^4x^{-1}z^{-3}}$

14) $-\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}m^2n^4y^{-2}} \div -\sqrt[5]{0,16m^5n^2y^{-2}}$

- *Racionalización*: es una operación que tiene por objeto hacer desaparecer ***siempre*** el ***radical del denominador.***

Racionalizar el denominador de los siguientes cocientes:

1^er^ Caso: cuando el radical del denominador es de $2^{do.}$ grado, es decir posee como radical una raíz cuadrada.

:

1) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

4) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

5) $\frac{12}{\sqrt{6}}$

6) $\frac{33}{\sqrt{33}}$

7) $\frac{3}{4 \cdot \sqrt{5}}$

8) $\frac{a}{\sqrt{b}}$

9) $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$

10) $\frac{5n^2}{3 \cdot \sqrt{mn}}$

11) $\frac{2x \cdot \sqrt[3]{4y}}{3y \cdot \sqrt{2x}}$

2^{do} *Caso*: cuando el radical del denominador es mayor al de 2^{do} grado, es decir radicales de 3^{er}, 4^{to}, 5^{to} y más grado.

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x}}$

2) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$

3) $\dfrac{\sqrt{3c^2}}{\sqrt[3]{9c}}$

4) $\dfrac{6ab}{\sqrt[3]{4a^2b}}$

5) $\dfrac{6}{5.\sqrt[3]{3x}}$

6) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}}$

7) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{9a}}$

8) $\dfrac{1}{5a\cdot\sqrt[4]{25x^3}}$

9) $\dfrac{x}{\sqrt[4]{27x^2}}$

10) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{7}}$

11) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8a^4}}$

12) $\dfrac{12}{\sqrt[5]{8a^2b}}$

13) $\dfrac{2}{\sqrt[6]{16}}$

14) $\dfrac{3}{\sqrt[6]{a^5b^6c^2}}$

15) $\dfrac{3mn}{\sqrt[6]{27mn^4}}$

16) $\dfrac{18x}{\sqrt[7]{32x^3y^2}}$

17) $\dfrac{3n}{\sqrt[7]{a^4b^5c^2}}$

3^{er} *Caso*: cuando el radical del denominador es un binomio.

23) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

24) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

25) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$

26) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

27) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

28) $\dfrac{\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

29) $\dfrac{\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

30) $\dfrac{2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

31) $\dfrac{\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

32) $\dfrac{\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

33) $\dfrac{2\cdot\sqrt{7}-3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{5}}$

34) $\dfrac{19}{5\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{3}}$

35) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{7\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}}$

36) $\dfrac{2\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{7}}$

37) $\dfrac{\sqrt{7}+3\cdot\sqrt{11}}{5\cdot\sqrt{7}+4\cdot\sqrt{11}}$

38) $\dfrac{\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{7}}{4\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{7}}$

39) $\dfrac{5\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3}}$

40) $\dfrac{2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}$

41) $\dfrac{4\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{7}}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{7}}$

42) $\dfrac{5\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3}}$

Cap

Definición de logaritmo

1 Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\log_3 x = 2$	b) $\log_2 x = -1$	c) $\log_5 x = -2$
d) $\log_{1/2} x = 0$	e) $\log_7 x = 1$	f) $\log x = 3$
g) $\log_2 x = 1{,}5$	h) $\log x = 0{,}4$	i) $\ln x = 2$

2 Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 27$	b) $\log_5 625$	c) $\log_7 343$
d) $\log_2 \frac{1}{32}$	e) $\log_3 \frac{1}{729}$	f) $\log_{1/2} \frac{1}{32}$
g) $\log_9 3$	h) $\log_3 \sqrt[4]{3}$	i) $\log_{27} 9$

3 Calcula la base de los siguientes logaritmos:

a) $\log_x 64 = 2$	b) $\log_x 125 = 3$	c) $\log_x 729 = 3$
d) $\log_x \frac{1}{27} = 3$	e) $\log_x \frac{1}{25} = -2$	f) $\log_x \frac{1}{4} = 2$
g) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$	h) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$	i) $\log_x 9 = 4$

CONVIENE RECORDAR

IX

Pag. 40

$\log_a P = b \leftrightarrow P = a^b$

- Se llama logaritmo en base a de un número P, al número al que hay que elevar ...

Propiedades de los logaritmos

1 ¿A qué es igual cada una de estas expresiones? (Tienes que elegir la verdadera entre las tres propuestas. Sólo una de ellas es correcta.)

1) $log\ (a \cdot b) =$

a) $log\ a \cdot log\ b$

b) $log\ (a + b)$

c) $log\ a + log\ b$

2) $log\ \dfrac{a}{b} =$

a) $log\ a - log\ b$

b) $\dfrac{log\ a}{log\ b}$

c) $log\ (a - b)$

3) $log\ a^n =$

a) $log\ (a \cdot n)$

b) $n \cdot log\ a$

c) $(log\ a)^n$

4) $log\ a + log\ b =$

a) $log\ (a + b)$

b) $log\ a \cdot log\ b$

c) $log\ (a \cdot b)$

5) $log\ \sqrt[n]{a} =$

a) $\sqrt[n]{log\, a}$

b) $\dfrac{log\ a}{n}$

c) $log\ \dfrac{a}{n}$

6) $log\ a - log\ b =$

a) $\dfrac{log\ a}{log\ b}$

b) $log\ (a - b)$

c) $log\ \dfrac{a}{b}$

7) $log\ \dfrac{1}{a} =$

a) $-\ log\ a$

b) $1 - log\ a$

c) $(log\ a)^{-1}$

8) $log_b\ a =$

a) $\dfrac{ln\ a}{ln\ b}$

b) $\dfrac{ln\ b}{ln\ a}$

c) $ln\ a \cdot ln\ b$

9) $ln\ \sqrt{xy} =$

a) $\dfrac{1}{2}\ ln\ x + ln\ y$

b) $\sqrt{ln\ x + ln\ y}$

c) $\dfrac{1}{2}\ (ln\ x + ln\ y)$

10) $ln\ (a^2 - b^2) =$

a) $2\ ln\ a - 2\ ln\ b$

b) $ln\ (a + b) + ln\ (a - b)$

c) $\dfrac{ln\ a^2}{ln\ b^2}$

2 Aplica las propiedades de los logaritmos para completar, como en la cuestión **a**, las siguientes expresiones:

a) $log_a \frac{b.c}{d} = log\, b + log\, c - log\, d$	b) $log_a\, b^2 c^3 =$
c) $log_a \frac{b^2\, c}{d^2} =$	d) $log_a\, b\, \sqrt[3]{c} =$
e) $log_a \sqrt{\frac{b}{c}} =$	f) $log_a \sqrt{b\sqrt{c}} =$

3 Reduce las siguientes expresiones empleando un solo logaritmo:

a) $log_a\, b + 2\, log_a\, c = log_a\left(b \cdot c^2\right)$	b) $3\, log_a\, b + 2\, log_a\, c - log_a\, d =$
c) $2\, log_a\, b + \frac{1}{2}\, log_a c =$	d) $2\, log(b+c) + \frac{1}{2} log(m+2n)$
e) $2\, log\, a + \frac{1}{2} log\, c - 3\, log\, m - \frac{1}{3} log\, n$	

4 Sabiendo que $log\, 2 = 0{,}301$ calcula el logaritmo decimal de:

a) $2\,000$	b) $\sqrt{20}$	c) $(0{,}2)^5$	d) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

5 Si $log_2\, 3 = 1{,}585$ calcula:

a) $log_2\, 27$	b) $log_2\, 54$	c) $log_2\, 40{,}5$

CONVIENE RECORDAR

X

Pág. 40

- Propiedades de los logaritmos:

$log_a(P.Q) =$........................... $log_a\, P^n =$...........................

$log_a \frac{P}{Q} =$........................... $log_a \sqrt[n]{P} =$...........................

6 Sabemos que $log\ 2 = 0{,}301$ y $log\ 3 = 0{,}477$. Utiliza estos datos para calcular:

a) $log \dfrac{1}{27} =$

b) $log \sqrt{150} =$

c) $log (1,2)^5 =$

7 Expresa en función de $log\ 2$:

a) $log \sqrt{0,002} =$	b) $log 5 =$
c) $log \sqrt[3]{\dfrac{0,016}{5}}$	d) $log\ 125 =$

8 Si $log\ a = k$, justifica si son verdaderas o falsas estas igualdades:

a) $log\, a^{3/4} \sqrt{a} = \dfrac{5}{4} k$	b) $log \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \dfrac{k}{2}$

9 Utiliza la calculadora y los logaritmos decimales o neperianos para hallar:

a) $log_6 3,7 = \dfrac{ln 3,7}{ln 6} =$	b) $log_3 11,5 =$
c) $log_5 2,3 =$	d) $log_{0,5} 17 =$
e) $log_{1,3} 87 =$	f) $log_{18} 0,002 =$

Observa

Para resolver la ecuación $2^x = 7{,}3$ tomamos logaritmos decimales o neperianos:

$$\ln 2^x = \ln 7{,}3 \rightarrow x \ln 2 = \ln 7{,}3 \rightarrow x = \frac{\ln 7{,}3}{\ln 2} =$$

Halla el valor de x utilizando la calculadora.

10 Aplica el procedimiento del ejercicio anterior para resolver las ecuaciones:

a) $1{,}5^x = 4$	b) $0{,}8^x = 9{,}2$
c) $2^{x-3} = 18{,}4$	d) $4^{2x+1} = 0{,}85$
e) $0{,}6^{1-x} = 5$	f) $2^{x^2} = 11{,}3$
g) $5^{\sqrt{x}} = 4{,}1$	h) $\dfrac{3}{2^x} = 218$

11 Calcula $\log_2 5 \cdot \log_5 2$ y prueba si se obtiene el mismo resultado con otros números cualesquiera.

CONVIENE RECORDAR

XI

Pág. 40

- Cambio de base:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad \text{y concretamente} \quad \log_a N = \frac{\ln N}{\ln a} \quad \text{o bien} \quad \log_a N = \frac{\log N}{\log a}$$

Ecuaciones logarítmicas

1 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x-1)+\log(x+6)=\log(3x+2)$	b) $\log(x+2)+\log(x+3)=\log(7x+6)$
c) $\log(2x-1)+\log(x+2)=\log 3x^2$	d) $2\log(x+3)+\log 2=\log(3x^2+5)$
e) $2\log(2x+3)=0$	f) $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log 13-\log 12$
g) $\log(x+7)+\log(x-1)-\log(x-3)=\log 33$	h) $\log(3x+2)-\log(x+4)=\log(2x+3)-\log(x+6)$
i) $\frac{1}{2}\log x=\log(x-2)$	j) $\log(x+3)+\log(x-3)-\log 7=\log(x+1)-\log 5$
k) $\frac{1}{2}\log(3x+1)=\log(3x-1)$	l) $\log(x+3)-\frac{1}{2}\log(x-6)=1$

2 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = 5 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x + y = 70 \end{cases}$	d) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$	f) $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$
g) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$	h) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$
i) $\begin{cases} 2 \log_x (4-y) = 1 \\ \log_y (4+x) = 2 \end{cases}$	j) $\begin{cases} \log(x+y) - \log(x-y) = \log 5 \\ \dfrac{2^x}{2^y} = 2 \end{cases}$

Repaso

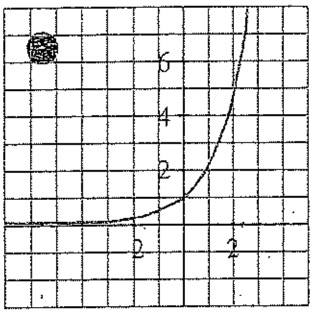
1 Estas gráficas corresponden a funciones del tipo de las que has representado en este cuaderno.

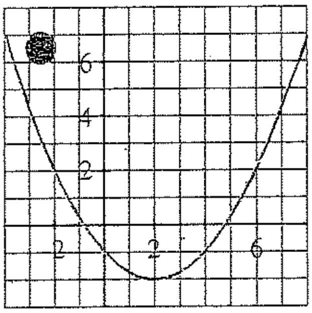
Asocia a cada una de ellas su correspondiente expresión analítica que es alguna de estas:

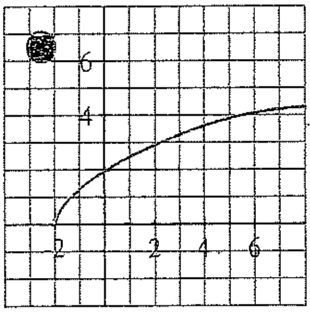
a) $y=\dfrac{x-4}{2}$ b) $y=\sqrt{2x+4}$ c) $y=\dfrac{1}{x-3}$ d) $y=-x^2+7\ si \in[0,\infty)$

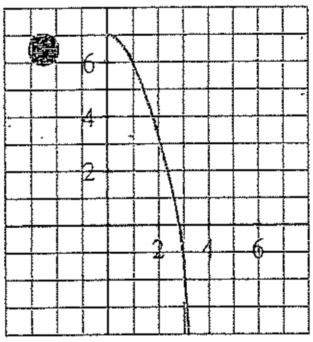
e) $y=2,2^x$ f) $y=|x-3|$ g) $y=log_3\, x$ h) $y=5\cdot 0,7^x$

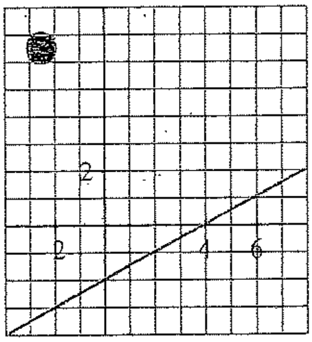
i) $y=1+\dfrac{1}{x+2}$ j) $y=log_{0,5}\, x$ k) $y=-\sqrt{x+1}$ l) $y=\dfrac{1}{4}(x-2)^2-2$

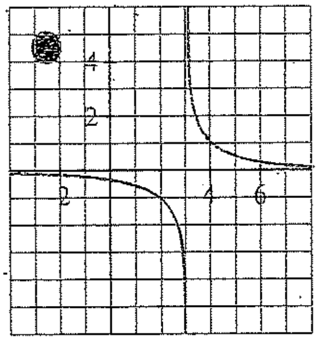


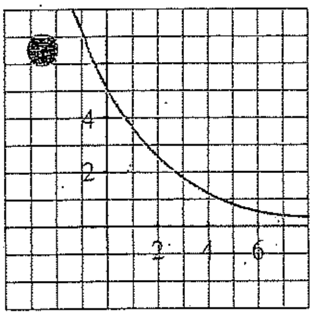


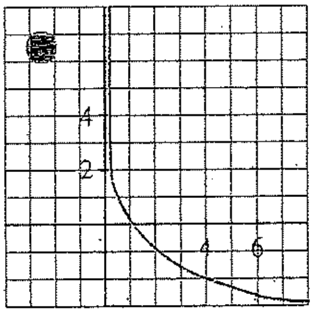


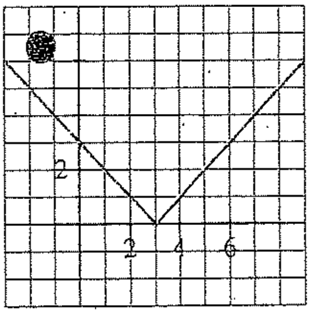


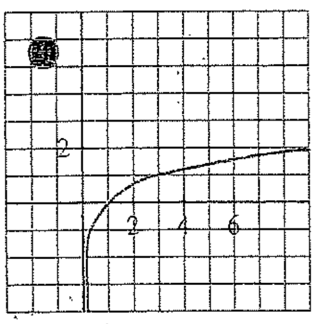


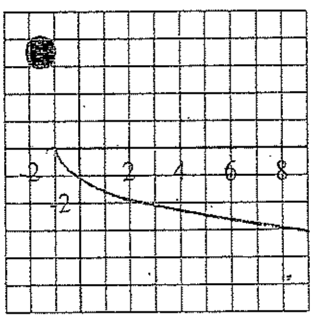


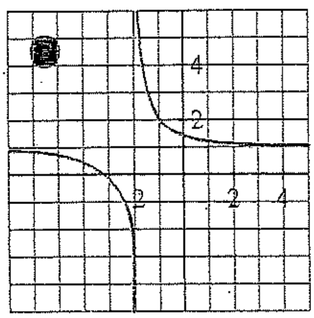












TEMA 2– ÁLGEBRA

2.1 – FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

LA DIVISIBILIDAD EN LOS POLINOMIOS

Un polinomio P(x) es divisible por otro polinomio Q(x) cuando el cociente P(x):Q(x) es exacto. En tal caso, P(x) : Q(x) = C(x) y por tanto, P(x) se puede descomponer en producto de Q(x) por C(x). Es decir, P(x) = Q(x).C(x). Los polinomios Q(x) y C(x) se llaman **divisores** de P(x).

Un polinomio se dice que es **irreducible** cuando ningún polinomio de grado inferior es divisor suyo.

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

- Sacar factor común
- Si es de grado mayor o igual que tres: Regla de Ruffini (Probar con los divisores del término independiente)
- Si es de grado dos :
  - Recordar los productos notables: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
    $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
    $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
  - Resolver la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$

2.2 – FRACCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios: $\frac{P(x)}{Q(x)}$

SIMPLIFICACIÓN

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por un mismo polinomio, al hacerlo se simplifica la fracción.

Si dividimos numerador y denominar por su m.c.d se obtiene la **fracción irreducible.**

FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos **fracciones** son **equivalentes** : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \Leftrightarrow P(x).S(x) = Q(x).R(x)$

REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

Si tenemos varias fracciones algebraicas, podemos obtener otras que, siendo respectivamente equivalentes a las primeras, tengan entre sí el mismo denominador. Se dice, entonces, que se han reducido a **denominador común.**

OPERACIONES CON FRACCIONES

Para **sumar(restar)** fracciones algebraicas, se reducen a común denominador (si no lo están ya) y se suman(restan) sus numeradores.

El **producto** de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

La fracción inversa de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $\frac{Q(x)}{P(x)}$ pues su producto es 1.

El **cociente** de dos fracciones algebraicas es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

3.3 – RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. NÚMERO DE SOLUCIONES

Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Número de soluciones: Llamamos discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ Dos soluciones distintas
- Si $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ Una solución doble
- Si $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ No tiene solución

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Completa: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Incompletas : Si $b = 0$ $ax^2 + c = 0$ Se despeja x^2 y luego se hace la raíz
  Si $c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ Se saca factor común la x y luego cada uno de los productos se iguala a cero y se obtienen las soluciones.

ECUACIONS BICUADRÁTICAS $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$

Se hace un cambio de variable $x^2 = t$
Se resuelve la ecuación de segundo grado en t
Se calcula las x como la raíz de t

ECUACIONES CON RADICALES

Si sólo hay una raíz: Se aísla la raíz en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros al cuadrado.

Si hay más de una raíz: Se aísla una raíz en un miembro de la ecuación y se elevan los dos miembros al cuadrado. Esto habrá que hacer tantas veces como raíces tenga.

Nota : Al elevar al cuadrado se duplican las soluciones, por tanto es necesario comprobar las soluciones en la ecuación inicial.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON "x" EN EL DENOMINADOR

Hacer común denominador
Eliminar denominadores
Resolver la ecuación lineal obtenida
Comprobar las soluciones

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS

Se factoriza (Utilizando sacar factor común, productos notables, ecuaciones de segundo grado, Ruffini) y luego se iguala cada factor a cero.

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$|x-a| = b \begin{cases} x-a=b \\ x-a=-b \end{cases}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales son aquellas en la que la incógnita está en el exponente.

- Si no hay sumas :
  - Si se pueden poner todos en función de la misma base : $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
  - Si no se pueden poner todos en función de la misma base: Tomar logaritmos : $a^x = b \Rightarrow \log a^x = \log b \Rightarrow x.\log a = \log b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$
  - Si hay sumas: Cambio de variable $a^x = t$
    Resolver la ecuación en t
    Calcular la x

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

Utilizar las propiedades de los logaritmos:

$k = \log_a a^k$ $\qquad$ $\log a^b = b.\log a$

$\log a + \log b = \log (a.b)$ $\qquad$ $\log a - \log b = \log (a/b)$

Comprobar las soluciones en la ecuación inicial teniendo el cuenta que el dominio de un logaritmo es $(0,+\infty)$ $\quad$ [$\log (f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$]

3.4 – SISTEMAS DE ECUACIONES

SOLUCIÓN

Una **solución** de una ecuación con varias incógnitas es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que hacen cierta la igualdad.

Las ecuaciones con más de una incógnita suelen tener infinitas soluciones

DEFINICIÓN DE UN SISTEMA

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar su solución (o soluciones) común.

RESOLVER UN SISTEMA

Para **resolver un sistema de ecuaciones** consiste en buscar una solución común a todas ellas.

METODOS TRADICIONALES: SUSTITUCIÓN, IGUALACIÓN Y REDUCCIÓN

- **Sustitución**: Despejar una incógnita de una ecuación y sustituir en la otra.
- **Reducción**: Multiplicar las ecuaciones por los números adecuados para que al sumarlas se vaya una incógnita.
- **Igualación**: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan.

3.5 – MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

El **método de Gauss** es una interesante generalización del método de reducción para sistemas lineales de más de dos ecuaciones e incógnitas.

SISTEMAS ESCALONADOS

Un **sistema escalonado** es un sistema de ecuaciones en la que en cada ecuación hay una incógnita menos:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ b'y + c'z &= d' \\ c''z &= d'' \end{aligned}$$

Se resuelven de abajo arriba: Primero la última ecuación, después la penúltima,..

MÉTODO DE GAUSS

Consiste en mediante operaciones elementales, sustituir una ecuación por una combinación lineal de otra, transformar un sistema en un sistema escalonado que es más sencillo de resolver.

El mismo camino puede hacerse operando sólo con el "esqueleto numérico" del sistema llamado **matriz del sistema**

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{array}\right) \approx \begin{cases} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=i \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ **Tiene una única solución** ($\exists!$ solución)

SISTEMAS INCOMPATIBLES **(sin solución)**

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = k$ ($k \neq 0$), entonces el sistema es Incompatible $\Rightarrow$ **No tiene solución**

SISTEMAS INDETERMINADOS **(con infinitas soluciones)**

Si al aplicar el método de Gauss llegamos a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = 0$, se suprime. Si quedan menos ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. Se llama Sistema Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ **Existen Infinitas soluciones**

3.7 – INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

Una inecuación es una desigualdad ($<, \leq, >, \geq$) entre expresiones algebraicas.

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Solución de una inecuación es un valor de x con el cual se cumple la desigualdad.

RESOLVER UNA INECUACIÓN

Resolver una inecuación consiste en encontrar todas sus soluciones.
Habitualmente tiene infinitas, que se agrupan en intervalos de R.

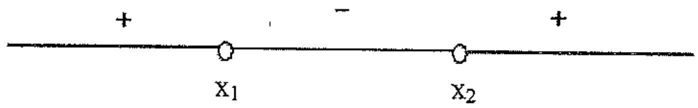
- **Inecuaciones lineales de primer grado**: (Se resuelven como una ecuación normal teniendo en cuenta que si se multiplica o divide por un número negativo la desigualdad cambia de signo)

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b : \quad \text{Si } a > 0 \quad x > -b/a \Rightarrow x \in (-b/a, +\infty)$$
$$\text{Si } a < 0 \quad x < -b/a \Rightarrow x \in (-\infty, -b/a)$$

- **Inecuaciones lineales de grado mayor o igual que dos**

  Se igualan a cero y se resuelve la ecuación. Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen, todo ese intervalo es solución.

$$ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

Si la desigualdad contiene el igual los puntos se pintan y se cogen los extremos.

- **Inecuaciones con cocientes**

  Se igualan a cero, por separado, numerador y denominador y se resuelve las ecuaciones.
  - Los puntos del numerador se incluyen si en la desigualdad está el igual.
  - Los puntos del denominador nunca se incluyen (no se puede dividir por cero).

  Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen todo ese intervalo es solución.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE INECUACIONES

Solución de un sistema de inecuaciones es una solución común a todas las inecuaciones que lo forman.

RESOLVER UN SISTEMA DE INECUACIONES

Resolver un sistema de inecuaciones consiste en encontrar todas sus soluciones.

Se resuelven por separado cada inecuación del sistema y luego se halla la intersección de las soluciones, es decir, las que cumplen todas las ecuaciones a la vez.

EJERCICIOS – TEMA 3 – ÁLGEBRA

- **Factorización de polinomios**

EJERCICIO 1 : Calcular las raíces de
a) $x^3 + 6x^2 - x - 6$ b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ c) $x^4 - 5x^2 + 4$ d) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

EJERCICIO 2 : Descomponer en factores los polinomios:
a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2$ c) $x^4 - 5x^2 + 4$
d) $x^3 + 2x^2 + 4x$ e) $2x^3 + 11x^2 + 2x - 15$ f) $3x^4 - 3x^3 - 18x^2$
g) $4x^2 + 12x + 9$ h) $25x^2 - 4$

EJERCICIO 3 : Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:
$P(x) = x^4 + 7x^3 + 12x$ $Q(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3$

- **Teorema del resto**

EJERCICIO 4 : Hallar m para que $5x^3 - 12x^2 + 4x + m$ sea divisible por $x - 2$

EJERCICIO 5 : Calcular a para que el polinomio $x^3 + ax + 10$ sea divisible por $x + 5$

EJERCICIO 6 : Dado el polinomio $x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 5x + m$, determinar m para que al dividirlo por $x + 3$ se obtenga 100 como resto.

- **Fracciones algebraicas**

EJERCICIO 7 : Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:
a) $\frac{x+3}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}$ b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-1}:\frac{x+2}{x+1}$ c) $\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2x}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$
e) $\frac{x^3-3x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}$ f) $\frac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9}$ g) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x+3}$
h) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x+5}$ i) $\frac{x^2-4}{x+6}:\frac{x^2-5x+6}{x^2-36}$ j) $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}\right):\left(\frac{x^2+2}{x^2}+\frac{3}{x}\right)$

EJERCICIO 8 : Calcula y simplifica:
a) $\frac{x}{x^2-4x+3}-\frac{3}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x}{x+1}+\frac{1+x}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}$
d) $\frac{x-3}{x^2+x+1}-\frac{3x^2}{x^3-1}$ e) $\frac{2}{x^2-2x+1}+\frac{x+1}{x^2-1}$ f) $\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{11}{x^2-11x+30}$
g) $\frac{1-x}{x^2-4x+3}-\frac{1+2x}{x^2-6x+9}-\frac{x+1}{x^2-9}$ h) $\frac{1+2x}{x^2+3x+2}-\frac{1-x}{x^2+5x+6}-\frac{1+x}{x^2+4x+3}$

- **Resolución de ecuaciones**

EJERCICIO 9 : Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $\frac{x^2}{2}-4x=3+\frac{x^2-12}{4}$ b) $x^4-4x^2+3=0$ c) $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{x-3}{x}=\frac{1}{2}$
d) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ e) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$ f) $-x.(x-1).(x^2-2) = 0$
g) $\frac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1}=2x$ h) $2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 36x = 0$ i) $\frac{x^2-16}{3}-x=\frac{2-3x}{3}-\frac{x^2}{3}$

j) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ k) $\sqrt{3x-3} + x = 7$ l) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{5}{4}$

m) $x + \sqrt{3x+10} = 6$ n) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ñ) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{2x}$

o) $\dfrac{x+1}{x-1} - 1 = \dfrac{1}{x}$ p) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x} = 2$ q) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

r) $3^{x+2} + 3^x = 90$ s) $4^x - 7.2^x - 8 = 0$ t) $7^{x-1} - 2^x = 0$

u) $4^x - 2^{x-1} - 14 = 0$ v) $\log(2x) - \log(x+1) = \log 4$ w) $3^x + \dfrac{1}{3^x} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{79}{9}$

x) $\log(3x-1) = \log 2 + \log(4x-6)$ y) $\dfrac{2^{4x-1}}{2^{3x+2}} = 16$ z) $2\log x + \log 4 = -2$

1) $2^{2x} - 2^{x+1} + \dfrac{3}{4} = 0$ 2) $\log(x-2) + \log(x-3) = \log 6$ 3) $\log(2x+3) - \log x = 1$

- **Sistemas de ecuaciones**

EJERCICIO 10 : Resuelve analíticamente los siguientes sistemas de ecuaciones e interpreta gráficamente la solución:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ x+y+2=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ 4x-y+2=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ x-y-2=0 \end{cases}$

EJERCICIO 11 : Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x^2-y=4 \\ 4x+3y=-2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 3x-3y=-4 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x+2y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2^x+3^y=11 \\ 2^{x+1}-3^{y-1}=5 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{l} 2\log x+\log y=2 \\ \log xy=1 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l} x+2y=\dfrac{3}{x} \\ x+y=\dfrac{2}{y} \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} 5^x=25.5^y \\ \log(x+y)-\log(x-y)=\log 2 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1 \\ 3x-y=8 \end{array}\right\}$ i) $\left.\begin{array}{l} 2x-1=y \\ \dfrac{x-1}{2}=y^2-1 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{l} 4.2^x=4^{y+1} \\ \log(x+y)+\log(x-y)=\log 3 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{l} 2x+y=52 \\ \sqrt{x}+y=7 \end{array}\right\}$ l) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{y}=20 \\ 3x-y=122 \end{array}\right\}$

- **Método de Gauss para sistemas lineales**

EJERCICIO 12 : Resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+5y+z=-3 \\ 4x+9y+3z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x+y-5z=13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+z=4 \\ y+z=3 \\ x+y=5 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+2z=7 \\ 2x+y+5z=10 \\ x+y-4z=-9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+3z=6 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$

- **Inecuaciones con una incógnita**

EJERCICIO 13 : Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $-2x+4\le -2$ b) $x^2+x-6\le 0$ c) $2x+1>-5$

d) $-3x+1>-5$ e) $x^2-4\le 0$ f) $2x-3<5$

g) $3x-1\le 4x$ h) $x^2-3x>-2$ i) $\frac{x-1}{3}\le 2x+1$

j) $\frac{2(x-1)}{3}>x-1$ k) $x^2-4\ge 0$ l) $3(x-1)+1\le 2(x+1)$

m) $2-3x<2(x+1)$ n) $-x^2+4x-4\le 0$ ñ) $\frac{x-2}{3-x}>0$

o) $\frac{x+3}{x^2-x}>0$ p) $\frac{x^2+2}{x-3}\le 0$ q) $\frac{x^2+x-6}{x^2-2x+1}\ge 0$

r) $x^3-4x\ge 0$ s) $x^3+3x^2-x-3<0$ t) $3x^2-6x>0$

- **Sistemas de inecuaciones con una incógnita**

EJERCICIO 14 : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+8\le x+14 \\ 2x>\frac{3}{2}x-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3\left(\frac{x}{2}+1\right)\ge x-8 \\ x+\frac{x}{3}-\frac{1}{2}+2>2x-\frac{5}{6} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 10-3x-x^2<0 \\ 3x+5>-16 \end{cases}$

- **Problemas algebraicos**

EJERCICIO 15 : Un número de tres cifras es tal que la suma de sus cifras es 9. Si el orden de las cifras se invierte, el número disminuye en 99 unidades y la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades. Hallar dicho número.

EJERCICIO 16 : El área de un trapecio isósceles es 7 m^2 y su base menor mide 2,5 m. Calcular la base mayor y la altura, sabiendo que ésta es las dos terceras partes de la base mayor.

EJERCICIO 17 : Un número de dos cifras elevado al cuadrado se diferencia del cuadrado del número que resulta al intercambiar sus cifras en 297. La cifra de las unidades es la mitad de la de las decenas. Hallar el número.

EJERCICIO 18 : El área de un triángulo isósceles es 60 m^2 y cada uno de los lados iguales mide 13 m. Hallar la base y la altura del triángulo.

EJERCICIO 19 : Dos hermanos se diferencian en cuatro años de edad. Dentro de ocho años, las edades de ambos sumarán 40 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?

EJERCICIO 20 : De un rectángulo sabemos que su área es 192 cm^2 y sus diagonales miden 20 cm. Calcula la longitud de sus lados.

EJERCICIO 21 : Por dos bolígrafos, un lápiz y un rotulador he pagado 6 euros. Por cuatro bolígrafos y dos rotuladores ha pagado 10 euros. Y por cinco lápices y tres rotuladores he pagado 11 euros. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

EJERCICIO 22 : Halla cuatro números enteros consecutivos que sumen 366.

EJERCICIO 23 : Halla dos números sabiendo que suman 7 y sus inversos, 7/12.

EJERCICIO 24 : Halla la medida de los lados de un rectángulo si sabemos que su perímetro es 20 cm y la diagonal $\sqrt{58}$ cm.

EJERCICIO 25 : Si aumentamos en 2 dm cada arista de un recipiente cúbico, su capacidad aumenta en 98 litros. Averigua la capacidad inicial del depósito.

EJERCICIO 26 : En un aula estudian 28 alumnos. De ellos, hay tantos alumnos con ojos verdes como alumnos con ojos azules, y el resto tiene ojos castaños. Si el número de alumnos con ojos castaños es igual que los alumnos que tienen ojos verdes y azules juntos. ¿cuántos alumnos hay con cada color de ojos?

EJERCICIO 27 : Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, siendo un total de 20 personas entre hombres, mujeres y niños. Contando a los hombres y las mujeres juntos, su número es el triple que el número de niños. Además, si hubiera ido una mujer más, su número igualaría al de los hombres. Calcula cuántos hombres, mujeres y niños han ido a la excursión.

EJERCICIO 28 : Ana se dispone a invertir 100.000 euros. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 euros de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

EJERCICIO 29 : Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m^2. Halla las dimensiones del polígono.

EJERCICIO 30 : El alquiler de una tienda de campaña cuesta 90 euros al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión "Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 euros cada uno". ¿Cuántos amigos van de excursión?

EJERCICIO 31 : Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

EJERCICIO 32 : En la actualidad la edad de un padre es el triple de la de su hijo, y dentro de 15 años la edad del padre será el doble de la de su hijo. ¿Cuántos años tienen en este momento el padre y el hijo?

EJERCICIO 33 : Si Juan sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?

11

Para practicar

Factorización

1 Descompón en factores estos polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $9x^4 - x^2$ b) $4x^2 - 28x + 49$

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ d) $2x^3 - x^2 - x$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$ f) $x^4 + 2x^2 + 1$

2 Halla, en cada uno de estos casos, el máx.c.d. $[A(x), B(x)]$ y el mín.c.m. $[A(x), B(x)]$:

a) $A(x) = x^2 + x - 12;\ B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1;\ B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2;\ B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

3 Resuelve estas ecuaciones factorizando previamente:

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$ b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$ d) $x^3 - 49x = 0$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$ f) $x^6 + 3x^2 = 0$

Fracciones algebraicas

4 Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^5 + 3x^4 + 2x^3}$ b) $\dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4}$

c) $\dfrac{-x^3 - 4x^2 + 11x + 30}{x^2 + 2x - 15}$ d) $\dfrac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

5 Opera y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3a+3}{12a-12} : \dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right)$

e) $\left(1 - \dfrac{x+1}{x+2} \cdot \dfrac{x+3}{x+2}\right) : \dfrac{1}{x+2}$

6 Demuestra las siguientes identidades:

a) $\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-2}\right) : \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}\right) = 2x - 5$

Ecuaciones de primer y segundo grado

7 Resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x + 2)^2$

c) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $0{,}5(x-1)^2 - 0{,}25(x+1)^2 = 4 - x$

b) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)^2 - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{x-1}{4}$

c) $0{,}\hat{3}x^2 - x - 1{,}\hat{3} = 0$

d) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

e) $\dfrac{x^2-2x+5}{2} - \dfrac{x^2+3x}{4} = \dfrac{x^2-4x+15}{6}$

f) $\dfrac{3x+1}{3} - \dfrac{5x^2+3}{2} = \dfrac{x^2-1}{2} - \dfrac{x+2}{3}$

g) $(x-a)^2 + x(x+b) = 8b^2 - x(2a-b) + a^2$

Ecuaciones bicuadradas

9 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

10 Resuelve:

a) $(x^2-2)^2 = 1$

b) $\dfrac{3x^4-1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x^4 - 2 - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{x^2-5}{4}$

c) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

d) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

Ecuaciones con fracciones algebraicas

11 Resuelve estas ecuaciones y comprueba la validez de las soluciones:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

b) $\dfrac{3x-7}{x} = \dfrac{8x}{x+1} - 5$

c) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} = x + 2$

e) $\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} = x - 4$

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+3}$

Ecuaciones con radicales

12 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $\sqrt{5x+6} = 3 + 2x$ b) $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$ d) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-5} = 0$

13 Resuelve:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

c) $\sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$ d) $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{x}{8}$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x - 4$ d) $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2-16x}$

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$ f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 - \sqrt[4]{3x+1}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

15 Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:

a) $3^{x^2+1} = \frac{1}{9}$ b) $\frac{9^{2x}}{3^x} = 27$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \frac{5}{4}$ d) $5^{x^2+3x} = 0{,}04$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$ f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

g) $(0{,}01)^x = 100$ h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125$ j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5}$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1$ l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25$

16 Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

a) $\frac{1}{e^x} = 27$ b) $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$ d) $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$ f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

17 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$ b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$ d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$ f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6$ h) $\sqrt{3^{2x}+7} = 3^x + 1$

i) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

18 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log\frac{13}{12}$

b) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$

c) $(x-1)\log(3^{x+1}) = 3\log 3$

d) $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$

19 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\log_5(x^2-2x+5) = 1$

b) $\log\sqrt{3x+5} + \log\sqrt{x} = 1$

c) $2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0$

d) $\frac{1}{2}\log_{11}(x+5) = 1$

e) $\log(x^2+3x+36) = 1 + \log(x+3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

Sistemas de ecuaciones

20 Resuelve:

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2y - x = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

21 Resuelve:

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

22 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x - e^{y+1} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2-1} = 0{,}1 \\ \frac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0{,}25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^{2x} + 3^{y-1} = 4 \\ 3^{x+1} + 3^y = 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^y = \frac{1}{2} \\ 2^{2(x-y)} = 4 \end{cases}$

13

23 Resuelve:

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

Método de Gauss

24 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

25 Resuelve:

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z - 3 = 0 \\ x + y = z - 5 \\ x = z - 2y - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 3y + z = -11 \\ x - y + 1 = z \\ 2x + 2y = 8 + z \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = z - 6 \\ 2x - y - \dfrac{z}{5} = 0 \\ \dfrac{-3x}{4} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2} - 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2(x-1)}{5} + y = \dfrac{z}{6} - 4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = 8 \\ x + 2y + \dfrac{z}{4} = 1 \end{cases}$

26 Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

27 Resuelve estas inecuaciones:

a) $5(2 + x) > -5x$ b) $\dfrac{x-1}{2} > x - 1$

c) $x^2 + 5x < 0$ d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

28 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

29 Resuelve:

a) $(x + 1)\, x^2\, (x - 3) > 0$ b) $x(x^2 + 3) < 0$

c) $\dfrac{x^2}{x + 4} < 0$ d) $\dfrac{x - 3}{x + 2} < 0$

30 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \geq 0 \end{cases}$

31 Resuelve gráficamente:

a) $x + y - 2 \geq 0$ b) $2x - 3y \leq 6$

c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$ d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

32 Resuelve gráficamente:

a) $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

33 Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas:

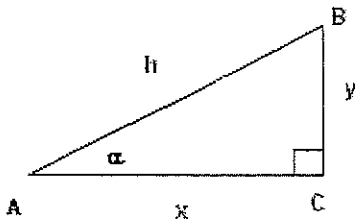
a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ 2x - y > 1 \\ y > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x - y \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

TEMA 4 – RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

4.1 – RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0º a 90º)

DEFINICIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



SENO DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h}$$

COSENO DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h}$$

TANGENTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{y}{x}$$

COSECANTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{h}{y}$$

SECANTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre la hipotenusa y el cateto contiguo

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{h}{x}$$

COTANGENTE DEL ÁNGULO α: es la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto

$$\text{cotag } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{x}{y}$$

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema de Pitágoras : $x^2 + y^2 = h^2$

Dividiendo entre x^2 : $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2 \Rightarrow 1 + \text{tag}^2\,\alpha = \sec^2\alpha$

Dividiendo entre y^2 : $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{h}{y}\right)^2 \Rightarrow \text{cotag}^2\,\alpha + 1 = \text{cosec}^2\,\alpha$

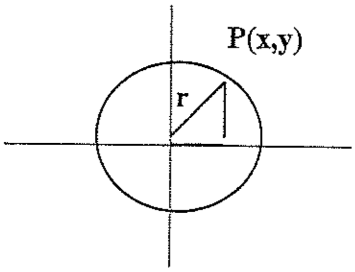
Dividiendo entre h^2 : $\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$

Razones inversas : $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$; $\text{cotag}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tag}\alpha}$

La tangente: $\text{tag}\,\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y/h}{x/h} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

4.2 – RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA (0º a 360º)

CIRCUNFERENCIA DE RADIO r

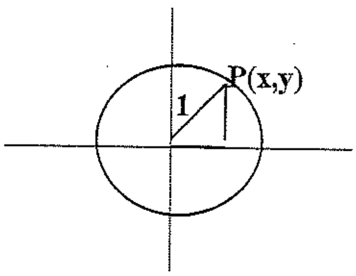


$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{r}$ $\quad$ $\text{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y}$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ $\quad$ $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\quad$ $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}$

CIRCUNFERENCIA UNIDAD o GONIOMÉTRICA

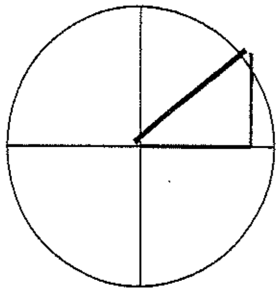
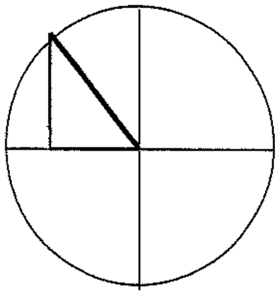
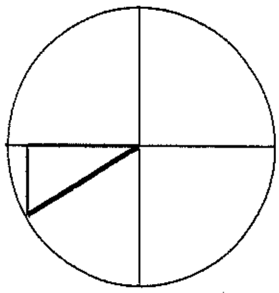
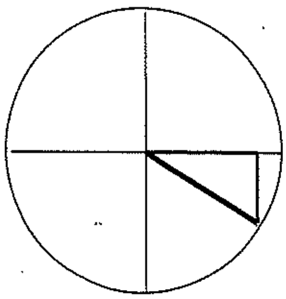


$\text{sen}\,\alpha = y$ $\quad$ $\text{cosec}\alpha = \dfrac{1}{y}$

$\cos\alpha = x$ $\quad$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{x}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\quad$ $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

CUADRANTES	DIBUJO	ÁNGULO	SEN α	COS α	TAG α
1°		$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+
2°		$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-
3°		$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	-	-	+
4°		$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	-	+	-

4.3 – AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

ÁNGULOS MAYORES DE 360º

Los valores comprendidos entre 0º y 360º nos permiten expresar la medida de cualquier ángulo. Por ejemplo, podemos darle sentido al ángulo 400º = 360º + 40º al situarlo sobre la circunferencia goniométrica, pues el segundo lado dará una vuelta completa (360º) más un ángulo de 40º : 400º = 360º + 40º = 1 vuelta + 40º

Para cualquier ángulo mayor que 360º **se divide entre 360 y el cociente nos da el número de vueltas enteras y el resto, el ángulo β(entre 0º y 360º)**
$\alpha = n.360^\circ + \beta$, donde n es un número entero de vueltas (positivo o negativo)

ÁNGULOS NEGATIVOS

Los ángulos negativos se miden a favor de las agujas del reloj.

Para convertir un ángulo negativo en positivo, se le suman tantas vueltas como sean necesarias hasta obtener un ángulo entre 0º y 360º. Las razones trigonométricas se mantienen.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON CALCULADORA

Obtener las razones trigonométricas de un ángulo

Las calculadoras científicas tienen las teclas “sin”, “cos”, “tan”, correspondiente a las razones trigonométricas sen, cos y tag. Si el ángulo viene dado en grados, la calculadora tiene que estar en modo “DEG”

Pasar de grados, minutos y segundos a grados y viceversa

La tecla “º’ ’’” permite introducir en la calculadora un ángulo dado en grados, minutos y segundos. La calculadora nos da, automáticamente, una expresión decimal de la medida del ángulo (en grados).

Para pasar de una expresión decimal de grados a grados, minutos y segundos, se utiliza la secuencia “INV” “º’ ’’” (“INV” = “SHIFT”)

Cálculo de un ángulo conocida una razón trigonométrica

Para hallar el ángulo cuyo seno es un cierto número, se utiliza la tecla “sen^{-1}” (arcoseno) que suele corresponder a la secuencia “INV” “SIN”. Análogamente para coseno y tangente.

Cálculo de una razón trigonométrica conociendo otra

Combinando las aplicaciones anteriores, se puede obtener una razón trigonométrica de un ángulo del cual solo se conoce otra razón trigonométrica.

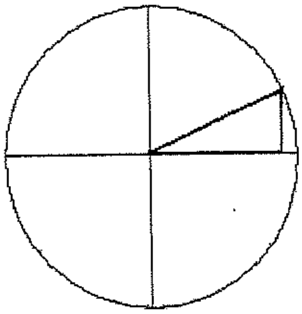
4.4 – RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN UN NÚMERO ENTERO DE VUELTAS : α y $\alpha + 360°k$. $k \in Z$

$\cos \beta = \cos(\alpha + 360°k) = \cos \alpha$

$\text{sen}\, \beta = \text{sen}(\alpha + 360°k) = \text{sen}\, \alpha$

$\text{tag}\, \beta = \text{tag}(\alpha + 360°k) = \text{tag}\, \alpha$



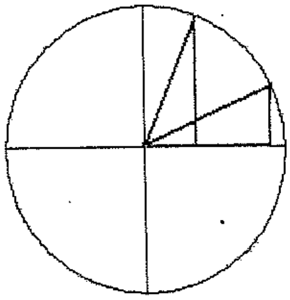
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos se dice que son complementarios cuando suman 90° : Si $\alpha + \beta = 90°$

$\cos \beta = \cos(90 - \alpha) = \text{sen}\, \alpha$

$\text{sen}\, \beta = \text{sen}(90 - \alpha) = \cos \alpha$

$\text{tag}\, \beta = \text{tag}(90 - \alpha) = \text{ctg}\, \alpha$

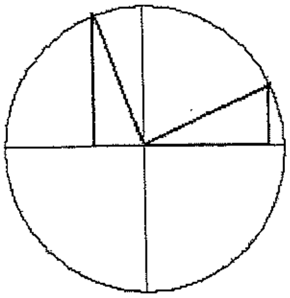


ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 90° : $B = 90 + \alpha$

$\cos \beta = \cos(90 + \alpha) = -\, \text{sen}\, \alpha$

$\text{sen}\, \beta = \text{sen}(90 + \alpha) = \cos \alpha$

$\text{tag}\, \beta = \text{tag}(90 + \alpha) = -\, \text{ctg}\, \alpha$



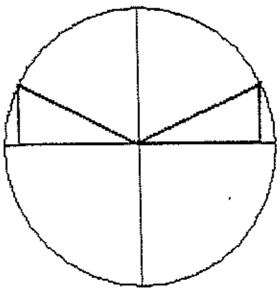
ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos se dice que son suplementarios si suman 180°: $\alpha + \beta = 180°$

$\cos \beta = \cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$

$\text{sen}\, \beta = \text{sen}(180 - \alpha) = \text{sen}\, \alpha$

$\text{tag}\, \beta = \text{tag}(180 - \alpha) = -\, \text{tg}\, \alpha$

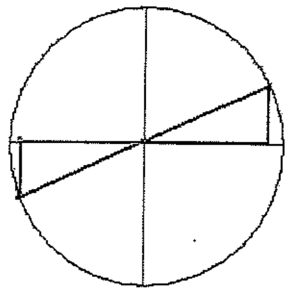


ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180º $\beta = 180 + \alpha$

$\cos\beta = \cos(180 + \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}(180 + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}(180 + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

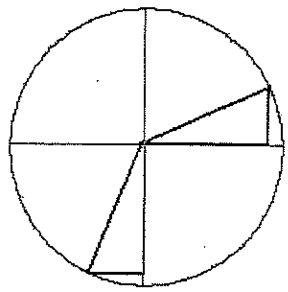


ÁNGULOS QUE SUMAN 270º $\alpha + \beta = 270º$

$\cos\beta = \cos(270 - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}(270 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}(270 - \alpha) = \text{ctg}\,\alpha$

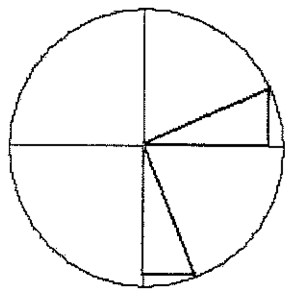


ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 270º $\beta = \alpha + 270$

$\cos\beta = \cos(270 + \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}(270 + \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{tag}\,\beta = \text{tag}(270 + \alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$



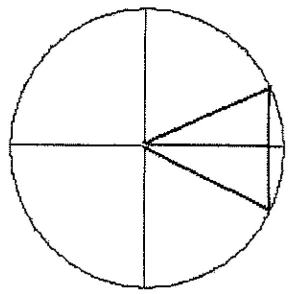
ÁNGULOS OPUESTOS

Dos ángulos son opuestos si suman 360º o 0º

$\cos(-\alpha) = \cos(360 - \alpha) = \cos\alpha$

$\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}(360 - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{tag}(-\alpha) = \text{tag}(360 - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$



4.5 – RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Resolver un triángulo rectángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

RELACIÓN ENTRE LOS LADOS . TEOREMA DE PITÁGORAS

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

RELACIÓN ENTRE LOS ÁNGULOS

Los ángulos de un triángulo suman 180º: $A + B + C = 180° \Rightarrow B + C = 90°$

RELACIÓN ENTRE LADOS Y ÁNGULOS

$\text{sen } B = \dfrac{b}{a} = \cos C \qquad \cos B = \dfrac{c}{a} = \text{sen } C \qquad \text{tag } B = \dfrac{b}{c} = \text{ctg } C$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

CASO I : Conocidos dos lados: El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El ángulo que forman dos lados conocidos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona.

CASO II : Conocidos un lado y un ángulo: Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos. El otro lado aplicando el teorema de Pitágoras.

ALGUNOS RESULTADOS ÚTILES

Proyección de un segmento: $\cos \alpha = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB.\cos\alpha \Rightarrow A'B' = AB.\cos\alpha$

La longitud de la proyección de un segmento sobre una recta es igual al producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que forman.

Altura de un triángulo: $\text{sen } \alpha = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a.\text{sen}\alpha$

La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados laterales por el seno del ángulo que dicho lado forma con la base.

Área de un triángulo: $\text{Área} = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{b.a.\text{sen } \alpha}{2} = \dfrac{1}{2} a.b.\text{sen } \alpha$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

4.6 – ESTRATEGIA DE LA ALTURA PARA RESOLVER TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

APLICACIÓN A TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS. ESTRATEGIA DE LA ALTURA.

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los métodos de resolución de los triángulos rectángulos, mediante la estrategia de la altura. Consiste en elegir adecuadamente una de sus alturas de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles con los datos que se tienen.

4.7 – RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

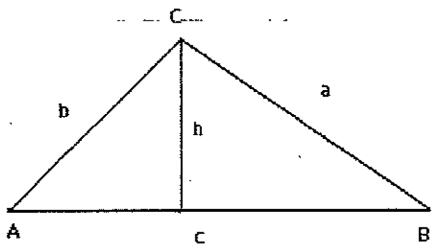
Vamos a obtener unas fórmulas que nos permitan resolver directamente triángulos cualesquiera , sin necesidad de utilizar cada vez la estrategia de la altura para descomponerlos en dos triángulos rectángulos:

TEOREMA DE LOS SENOS

Los lados de un triángulos son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Dem: Para demostrarlo aplicamos la estrategia de la altura. Trazamos la altura h desde el vértice C. Los triángulos AHC y BHC son rectángulos. Por tanto



$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} A = \dfrac{h}{b} \to h = b \operatorname{sen} A \\ \operatorname{sen} B = \dfrac{h}{a} \to h = a \operatorname{sen} B \end{array}\right\} b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \to \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Esta es la primera de las igualdades buscadas.

Si trazamos la altura desde el vértice B, relacionaríamos los lados a y c con sus ángulos opuestos, obteniendo: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

Se completa, así, la cadena de igualdades que queríamos demostrar.

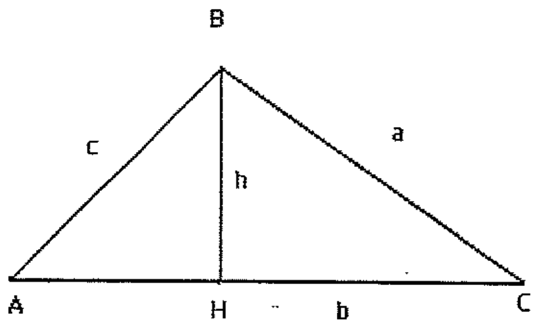
Nota: Al hallar un ángulo aplicando el teorema del seno puede haber más de una solución. Para saber si valen o no todas las soluciones obtenidas habrá que tener en cuanta que a lado mayor corresponde ángulo mayor y a lado menor ángulo menor.

TEOREMA DEL COSENO

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Dem : Trazamos la altura, h, sobre el lado b:



$$\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c.\cos A$$
$$HC = b \quad AH = b - c.\cos A$$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y BHC y teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, resulta:

$a^2 = h^2 + HC^2 = h^2 + (b - c.\cos A)^2 = h^2 + b^2 + c^2.\cos^2 A - 2.b.c.\cos A$

$c^2 = h^2 + AH^2 = h^2 + (c.\cos A)^2 = h^2 + c^2.\cos^2 A$

Restando: $a^2 - c^2 = b^2 - 2bc.\cos A$ *Despejando:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

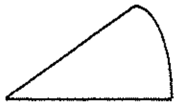
De forma análoga se llegaría a las otras dos relaciones.

TEMAS 5 – FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMETRÍAS

5.1 – UNIDAD PARA MEDIR ÁNGULOS: EL RADIÁN

DEFINICIÓN DE RADIAN

Se llama **radian** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.



$$\text{Ángulo completo} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Nota: Si una circunferencia fuera el doble de grande, el radio también sería el doble, por lo que el ángulo correspondiente a un arco que mida como el radio sería el mismo.

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

$360° \longleftrightarrow 2\Pi$ rad ó $180° \longleftrightarrow \Pi$ rad

UTILIDAD DE LOS RADIANES

Para los problemas de trigonometría, astronomía, navegación y resolución de triángulos en general, se usan las medidas de los ángulos en grados. Pero para representar y estudiar funciones trigonométricas se utilizan los radianes.

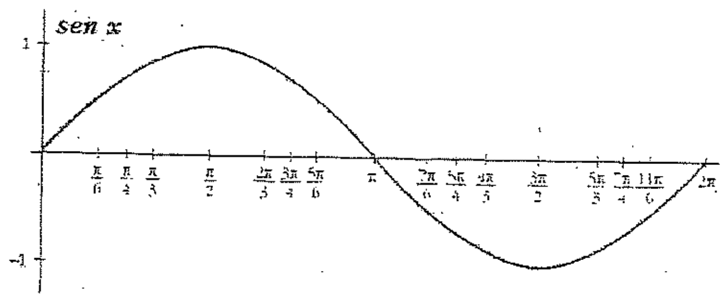
CALCULADORA

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes, hay que empezar poniendo la calculadora en modo correspondiente (MODE RAD). El resto es igual que en grados.

5.2 – FUNCIONES CIRCULARES

FUNCIÓN SENO

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
seno	0	1/2	2/2	3/2	1	3/2	2/2	1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	-1	-3/2	-2/2	-1/2	0

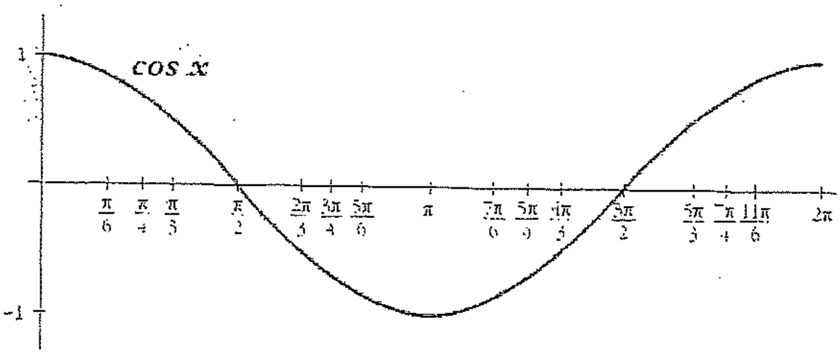


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R
- Recorrido : [-1,1]
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente (0°+360°k,90°+360°k) ∪ (270°+360°k,360°+360°k)
- Decreciente (90°+360°k,270°+360°k)
- Máximo x = 90°+360°k y = 1
- Mínimo x = 270°+360°k y = -1
- Concava: (0°+360°k,180°+360°k)
- Convexa: (180°+360°k,360°+360°k)
- Puntos de inflexión x = 0°+180°k y = 0

FUNCIÓN COSENO

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
cos	1	3/2	2/2	1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	-1	-3/2	-2/2	-1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	1

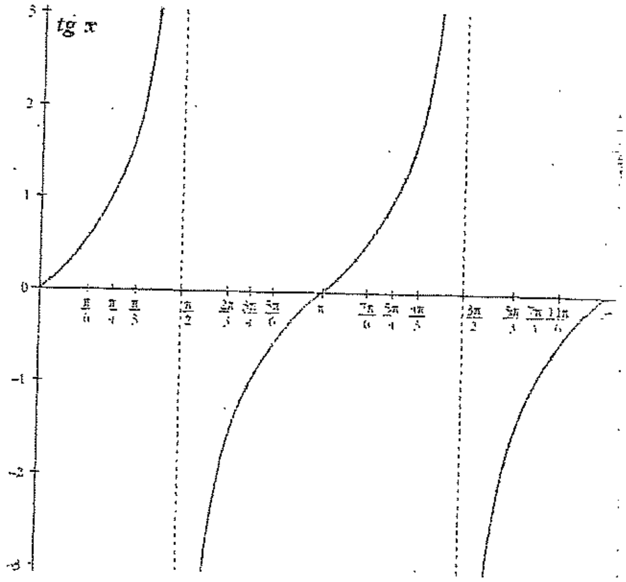


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R
- Recorrido : [-1,1]
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente (180°+360°k,360°+360°k)
- Decreciente (0°+360°k,180°+360°k)
- Máximo x = 0°+360°k y = 1
- Mínimo x = 180°+360°k y = -1
- Concava: (0°+360°k,90°+360°k) ∪ (270°+360°k,360°+360°k)
- Convexa: (90°+360°k,270°+360°k)
- Puntos de inflexión x = 90°+180°k y = 0

FUNCIÓN TANGENTE

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
Tag	0	3/3	1	3		-3	-1	-3/3	0	3/3	1	3		-3	-1	-3/3	0



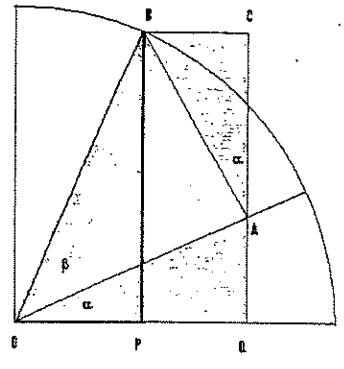
CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R – {90º+180ºk}
- Recorrido : R
- Periodicidad : π
- Continua: R – {90º+180ºk}
- Creciente R – {90º+180ºk}
- Concava: (0º+180ºk,90º+180ºk)
- Convexa: (90º+180ºk,180º+180ºk)
- Puntos de inflexión x = 90º+180ºk y = 0

5.3 – FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Seno de la suma: sen $(\alpha + \beta)$ = sen α.cos β + cos α.sen β



Sen $(\alpha + \beta)$ = BP = CA + AQ
CA : cos α = CA/BA $\Rightarrow$ CA = BA.cosα
AQ : sen α = AQ/OA $\Rightarrow$ AQ = OA.sen α
BA = sen B
OA = cos B

Por tanto: sen $(\alpha + \beta)$ = sen β.cos α + cos β.sen α

Coseno de la suma : cos (α + B) = cosα.cosα - senα.senβ

Cos (α + B) = sen [90º+(α+β)] = sen [(90º+α)+β] = sen(90º+α).cosβ + cos(90º+α).senB = cosα.cosB + (– sen α).sen β = cosα.cosβ - senα .senβ

Tangente de la suma : $\mathbf{tag(\alpha+\beta)=\dfrac{tag\alpha+tag\beta}{1-tag\alpha.tag\beta}}$

$$\text{Tag}(\alpha+\beta)=\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\text{sen}\,\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha..\cos\beta-\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta}=\frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\text{tag}\alpha+\text{tag}\beta}{1-\text{tag}\alpha.\text{tag}\beta}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Seno de la resta: sen (α - β) = senα.cosβ - cosα.senβ

Sen (α - β) = sen (α + (-β)) = sen α.cos (-β) + cos α.sen (-β) = sen α.cosβ + cosα.(-senβ) = senα.cosβ - cosα.senβ

Coseno de la resta: cos (α - B) = cosα.cosβ + senα.senβ

Cos (α - β) = cos (α + (-β)) = cosα.cos(-β) - senα.sen(-β) = cosα.cosB - senα.(-senβ) = cosα.cosβ + senα.senβ

Tangente de la resta: $\mathbf{tag\ (\alpha-\beta)=\dfrac{tag\alpha-tag\beta}{1+tag\alpha.tag\beta}}$

$$\text{Tag}\ (\alpha-\beta)=\text{tag}(\alpha+(-\beta))=\frac{\text{tag}\alpha+\text{tag}(-\beta)}{1-\text{tag}\alpha.\text{tag}(-\beta)}=\frac{\text{tag}\alpha+(-\text{tag}\beta)}{1-\text{tag}\alpha.(-\text{tag}\beta)}=\frac{\text{tag}\alpha-\text{tag}\beta}{1+\text{tag}\alpha.\text{tag}\beta}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Seno del ángulo doble: sen(2α) = 2.senα.cosα

Sen (2α) = sen (α + α) = senα.cosα + cosα.senα = 2.senα.cosα

Coseno del ángulo doble: $\mathbf{\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}$

Cos (2α) = cos(α + α) = cosα.cosα - senα.senα = $\cos^2\alpha$ - $\text{sen}^2\alpha$

Tangente del ángulo doble : $\mathbf{tag\ (2\alpha)=\dfrac{2tag\alpha}{1-tag^2\alpha}}$

$$\text{Tag}\ (2\alpha)=\text{tag}\ (\alpha+\alpha)=\frac{\text{tag}\alpha+\text{tag}\alpha}{1-\text{tag}\alpha.\text{tag}\alpha}=\frac{2\text{tag}\alpha}{1-\text{tag}^2\alpha}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

$\text{Cos}\ \alpha = \cos(2.\frac{\alpha}{2}) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Seno del ángulo mitad : sen $\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\text{Cos}\ \alpha = (1 - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}) - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 1 + 2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Coseno del ángulo mitad: cos $\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\text{Cos}\ \alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - (1-\cos^2\frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Tangente del ángulo mitad: tag $\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Dividiendo sen $\frac{\alpha}{2}$ entre cos $\frac{\alpha}{2}$

Nota: En cada caso, el signo será + ó -, según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo $\frac{\alpha}{2}$

SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y DE COSENOS

Sen A + sen B = 2.sen $\frac{A+B}{2}$**.cos** $\frac{A-B}{2}$ **Sen A - sen B = 2.cos** $\frac{A+B}{2}$**.sen** $\frac{A-B}{2}$

Cos A + cos B = 2.cos $\frac{A+B}{2}$**.cos** $\frac{A-B}{2}$ **Cos A - cos B = -2.sen** $\frac{A+B}{2}$**.sen** $\frac{A-B}{2}$

Sen $(\alpha + B)$ = sen $\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\text{sen}\ \beta$
Sen $(\alpha - \beta)$ = sen $\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\text{sen}\beta$

Sumando: sen $(\alpha + \beta)$ + sen $(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\alpha.\cos\beta$
Restando: sen $(\alpha - \beta)$ – sen $(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha.\text{sen}\beta$

Cos $(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$
Cos $(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$

Sumando : cos $(\alpha + \beta)$ + cos $(\alpha - \beta) = 2.\cos\alpha.\cos\beta$
Restando: cos $(\alpha - \beta)$ – cos $(\alpha - \beta) = -\ 2.\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$

Llamando $\alpha + \beta = A$
$\alpha - \beta = B$

Y resolviendo el sistema, se tiene: $\alpha = \frac{A+B}{2}$; $\beta = \frac{A-B}{2}$ y las identidades.

5.4 – ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen funciones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar:

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

La soluciones que se obtengan deben ser comprobadas sobre la ecuación inicial si hemos elevado al cuadrado.

Pasos:
- Expresar todo con el mismo ángulo
- Expresar todo con la misma razón trigonométrica.

EJERCICIOS TRIGONOMETRÍA – TEMAS 4 Y 5

CAMBIOS DE UNIDADES

EJERCICIO 1 : Expresa en radianes las medidas de los siguientes ángulos:
a) 45° b) 120° c) 690° d) 1470°

EJERCICIO 2 : Expresa en grados los siguientes ángulos:
a) 3 rad b) 2,5 rad c) $\frac{7\pi}{2}$ rad d) $\frac{\pi}{5}$ rad

NO EJERCICIO 3 : Calcular $3\pi/4$ rad + 0,5 rectos + 50° 40' 3'' expresándolo en radianes.

OPERAR CON ÁNGULOS CONOCIDOS

EJERCICIO 4 : Halla, sin utilizar la calculadora, el cuadrante y las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
a) 135° b) 450° c) 210° d) –60°

EJERCICIO 5 : Calcula, razonadamente, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
a) 1035° b) –3400° c) 10.000° d) 2700°

EJERCICIO 6 : Calcula los valores de las siguientes expresiones, sin calculadora:
a) 2.tag 30° + 5.tag 240° - cos 270°
b) cos 60° + sen 150° + sen 210° + cos 240°

EJERCICIO 7 : Calcular las razones trigonométricas de 120°.

EJERCICIO 8 : Sabiendo que sen 25° = 0,42, cos 25° = 0,91 y tag 25° = 0,47, halla (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora) las principales razones trigonométricas de 155° y de 205°.

EJERCICIO 9 : Calcula las principales razones trigonométricas de 130° y de 230°, sabiendo que:
$\text{sen}\,40^\circ = 0,64;\ \cos 40^\circ = 0,77;\ \text{tg}\,40^\circ = 0,84$

CAMBIO DE CUADRANTES

EJERCICIO 10 : Sabiendo que sec α = -4 y $0 < \alpha < \pi$, calcular:
a) cosec $(3\pi/2 + \alpha)$ b) sen $(\pi/2 - \alpha)$ c) tag$(630° - \alpha)$

EJERCICIO 11 : Sabiendo que sen α = 2/3 y $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. Calcular:
a) cos $(3\pi/2 + \alpha)$ b) tag $(\pi - \alpha)$

EJERCICIO 12 : Sabiendo que cos α = -2/3 y $\pi < \alpha < 2\pi$. Calcular, sin calculadora:
a) cos $(3\pi/2 - \alpha)$ b) tag $(\pi + \alpha)$

EJERCICIO 13 : Sabiendo que cos 53° = 0,6. Calcular:
a) cos 37° b) sen 143° c) tag 127° d) cotag 233° e) sec (-53°)

EJERCICIO 14 : Sabiendo que tag α = ½ y que $\pi < \alpha < 3\pi/2$, calcular:

a) sen $(\pi/2 + \alpha)$ b) cos $(\pi + \alpha)$ c) tag $(\pi/2 - \alpha)$ d) sec $(360° - \alpha)$

EJERCICIO 15 : Sabiendo que cotag $\alpha = -2$ y que $\pi < \alpha < 2\pi$, calcular:
a) $\cos(\pi/2 + \alpha)$ b) sen $(\pi + \alpha)$ c) cotag $(\pi/2 - \alpha)$

EJERCICIO 16 : Sabiendo que sen $(\pi/2 + \alpha) = -1/3$. Calcular sen α y cos α (α pertenece al 2° cuadrante)

EJERCICIO 17 : Hallar el valor de la expresión $\dfrac{\text{sen}(\pi/2+x)+\cos(\pi-x)+\text{sen}(\pi-x)}{\cos(-x)+\text{sen}(-x)}$

EJERCICIO 18 : Calcular el valor de la expresión: $\dfrac{\text{cot ag}(\pi/2-x).\text{sen}(\pi/2+x)}{2.\text{tag}(\pi-\alpha)}$

EJERCICIO 19 : Hallar el valor de : $\dfrac{\text{tag}(\pi-x).\cos(-x)}{\text{cot ag}(\pi+x).\cos(\pi/2-x)}$

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 20 : Sea $\Pi/2 < \alpha < 2\Pi$ tal que tg $\alpha = 3/4$ calcular, sin utilizar la calculadora, el valor y el cuadrante de :
a) sen $(x/2)$ b) tg $(x + 3\Pi/4)$

EJERCICIO 21 : Si $\cos x = -4/5$ y $\Pi \le x \le 2\Pi$ Calcular, sin utilizar la calculadora, el cuadrante y el valor de cos $(x/2)$ y sen $(2x)$

EJERCICIO 22 : Conociendo sen $x = -3/5$ y sabiendo $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$, calcular, sin utilizar la calculadora, el valor y el cuadrante de:
a) tag $(x - \pi/4)$ b) sen $(x/2)$

EJERCICIO 23 : Si $\cos \alpha = -5/13$ y $\Pi < \alpha < 2.\Pi$. Calcular, sin utilizar la calculadora, el valor y el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos.
a) sen$(2.\alpha)$ b) tag $(\alpha/2)$

EJERCICIO 24 : Si x es un ángulo comprendido entre $\Pi/2$ y $3\Pi/2$ y su seno vale 3/5. Calcular, sin utilizar la calculadora, el sen $(2x)$ y $\cos(x/2)$. Razona los signos.

EJERCICIO 25: Si sen $x = -3/5$ $90° \le x \le 270°$ Calcular y razona en que cuadrante están:
a) sen $(x/2)$ b) cos $(2x)$

EJERCICIO 26 : Sabiendo que $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ y sen $\alpha = 1/3$
a) Hallar el cuadrante y el resto de razones trigonométricas de α
b) Hallar el cuadrante y el valor del cos (2α)
c) Hallar el cuadrante y el valor del sen $(\alpha/2)$
a) Hallar el cuadrante y el valor de tag $(\alpha - \pi/4)$

EJERCICIO 27 : Sabiendo que $90° < x < 270°$ y sen $x = -2/5$, hallar, sin utilizar calculadora, el cuadrante y el valor de : a) sen $(2x)$ b) cos $(x/2)$ c) ctg $(x + 45°)$

SIMPLIFICAR

EJERCICIO 28 : Simplificar las siguientes expresiones trigonométricas

a) $\dfrac{(1-\text{tag}^2x)\,\text{sen}\,x.\sec^2 x}{(\cos^2 x-\text{sen}^2 x)\,\text{tag}x}$

b) $\dfrac{\text{sen}(\pi+x)\,\text{tag}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{\sec^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right).(1-\cos^2 x)\cos x}-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

c) $\dfrac{1}{1-\text{sen}\,x}+\dfrac{1}{1+\text{sen}\,x}-2$

d) $\left[\dfrac{\sec x}{1+\text{tag}^2x}\right]:\left[(\text{sen}\,x+\cos x)^2-(\text{sen}\,x-\cos x)^2\right]$

DEMOSTRAR IDENTIDADES

EJERCICIO 29 : Comprobar si son ciertas las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

b) $\text{tag}x+\dfrac{1}{\text{tag}x}=\text{tag}x.\dfrac{1}{1-\cos^2 x}$

c) $\cos^2x+\text{sen}^2x+\text{tag}^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

d) $1+\dfrac{1}{\text{tag}^2x}=\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

EJERCICIO 30 : Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{\text{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}=\dfrac{1}{2}\text{tg}\,2x$

b) $\text{sen}(x+y)\cdot\text{sen}(x-y)=\text{sen}^2 x-\text{sen}^2 y$

c) $\cos(x+45^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)=\dfrac{1}{2}\cos 2x$

d) $\dfrac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,x}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{5\cos x+1}{2}$

e) $\cos x+2\,\text{sen}^2\dfrac{x}{2}=1$

f) $\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\text{sen}\,x}=\dfrac{4+4\cos x}{2\,\text{sen}\,x+\text{sen}\,2x}$

ECUACIONES

EJERCICIO 31 : Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

a) $\text{tag}^2x-\text{tag}\,x=0$

b) $2\cos^2x-\text{sen}^2x+1=0$

c) $2\text{sen}x.\cos^2x-6\text{sen}^3x=0$

d) $\cos(2x+20^\circ)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $3\sec x-2\,\text{sen}\,x.\text{tag}\,x=-3$

f) $\text{sen}^2 x+\dfrac{1}{\sec x}=\dfrac{5}{4}$

EJERCICIO 32 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x=3\,\text{sen}\,x-1$

b) $\text{sen}^2 x=1+\cos^2 x$

c) $(\text{sen}^2 x)-1=2\cos^2 x$

d) $\text{sen}\,x\,\text{sen}\,2x+2\,\text{sen}^2 x=0$

e) $2-4\cos^2 x=2\,\text{sen}\,x$

f) $\cos 2x+\text{sen}^2 x-\dfrac{1}{2}=0$

g) $\text{sen}\,(x+45^\circ)+\text{sen}\,(x-45^\circ)=1$

h) $\cos^2\dfrac{x}{2}\cos x=\dfrac{1}{4}$

i) $\cos 2x+\cos^2 x=2$

j) $\cos(6.x)+\cos(8.x)=-\sqrt{3}.\cos x$

k) $\cos 5x+\cos 3x=\sqrt{2}.\cos 4x$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 33 : Representa gráficamente y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y=\cos(x+\pi)$

b) $y=\text{sen}\,x+1$

PROBLEMAS

EJERCICIO 34 : Un barco, pide socorro recibiéndose la señal en dos estaciones A y B que distan entre sí 45 Km. Desde cada estación se miden los ángulos BAC = 44° 55' y ABC = 52° 16'. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada estación?

EJERCICIO 35 : Tres puntos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 Km, la de BC es de 9 Km, el ángulo que forman AB y BC es de 120°. ¿Cuál es la distancia de A a C?. Calcular los otros dos ángulos.

EJERCICIO 36 : Desde dos puntos situados en la misma orilla de un río y separados entre si 30 m se observa un árbol situado en la otra orilla. La distancia del primer punto al pie del árbol es de 24 m y el ángulo que forma la visual del segundo punto con respecto al árbol es de 45° 37'. Calcular la distancia del segundo punto al árbol y el ángulo que forma la visual del primer punto.

EJERCICIO 37 : Resolver el siguiente triángulo: A = 30°, a = 40 m, b = 65 m. Calcular su área. (Enuncia las resultados teóricos que utilices).

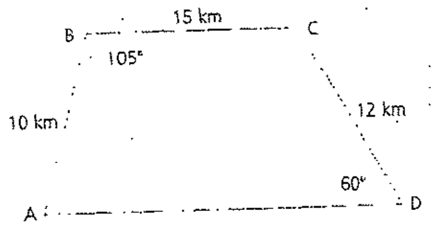
EJERCICIO 38 : Dos amigos parten de un mismo punto en dirección a dos ciudades situadas a 200 y 300 Km, respectivamente, del punto de partida. El ángulo que forman dichas carreteras es de 60°. En sus coches llevan un teléfono móvil que tiene un radio de alcance de 250 Kms. ¿Podrán ponerse en contacto cuando lleguen a su destino?. Calcular los otros dos ángulos.

EJERCICIO 39 : Dos asistentes a una conferencia se sitúan en las dos butacas extremas de una fila. Cada uno desde su posición, mide el ángulo que determinan el conferenciante y el otro asistente obteniéndose resultados de 37° y 42°. ¿A qué distancia está cada uno de ellos del conferenciante?. ¿A qué distancia se encuentran ambos del escenario?. Desde una butaca a la otra hay una distancia de 30 m.

EJERCICIO 40 : Una antena de telefonía móvil está sujeta al suelo con dos cables desde su punto más alto, y uno de los cables tiene doble longitud que el otro. Los puntos de sujeción de los cables al suelo están alineados con el pie de la antena, la distancia entre dichos anclajes es de 70 metros y el ángulo formado por los cables es de 120°. Calcula la longitud de cada uno de los cables y la altura de la antena de telefonía.

EJERCICIO 41 : De un triángulo ABC sabemos que a = 12 cm, b = 18 cm y A + B = 110° ¿Cuánto valen A y B?

EJERCICIO 42 : En un mapa de carreteras observamos los pueblos A, B, C y D como se indica en la figura. Por un error no aparece la distancia entre los pueblos A y D, pero si las distancias y ángulos que forman las carreteras que los unen. Calcula la distancia entre los pueblos A y D.



EJERCICIO 43 : En una circunferencia de radio 10 cm trazamos la cuerda AB de 8 cm. Si O es el centro de la circunferencia, halla el ángulo AOB.

EJERCICIO 44 : Desde una carretera se ve el punto más alto de una montaña, y la visual de dicho punto forma un ángulo de 40° con la horizontal. La carretera avanza hacia la montaña en línea recta, y después de avanzar 5 Km, vemos que la visual con el pico y la horizontal forma un ángulo de 75°. ¿Qué altura tiene la montaña?

TEMA 6 – NÚMEROS COMPLEJOS

6.1 – EN QUÉ CONSISTEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIONES

Al resolver ecuaciones del tipo : $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ que no tiene solución en los números reales.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como número válido a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

Unidad imaginaria: Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Y se designa por la letra i

$i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$ (El nombre i viene de imaginario)

Números complejos: Son las expresiones: a + bi, donde a y b son números reales.

Componentes: La expresión a + bi, se llama **forma binómica** de un número complejo porque tiene dos componentes: a = **Parte real**; b = **Parte imaginaria.**

Igualdad: Dos números complejos son iguales sólo cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.

El conjunto de todos los números complejos se designa por C.

$C = \{a + bi \,/\, a, b \in R\}$

Los números reales son complejos: $R \subset C$: Los reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero: a + 0i = a

Números imaginarios: Son los números complejos cuya componente imaginaria no es cero. Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario.

Números imaginarios puros: son los imaginarios cuya parte real es cero: 0 + bi = bi

Opuesto de un número complejo $z = a + bi$: $-z = -a - bi$

Conjugado de un número complejo $z = a + bi$: $\bar{z} = a - bi$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales,...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

0'30

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la recta real al **plano complejo.**

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama eje real y el Y, eje imaginario. El número complejo a + bi se representa mediante el punto (a,b) que se llama **afijo**, o mediante un vector de origen (0,0) y extremo (a,b).
Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

6.2 – OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Las operaciones con los números complejos en forma binómica se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

SUMA: La suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b+b')i$$

RESTA: La resta de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la resta de las partes reales y cuya parte imaginaria es la resta de las partes imaginarias.

$$z - z' = (a + bi) - (a' + b'i) = a + bi - a' - b'i = (a - a') + (b-b')i$$

MULTIPLICACIÓN

$$z.z' = (a + bi).(a' + b'i) = a.a' + a.b'i + ba'i + b.b'i^2 = a.a' + a.b'i + a'.bi - b.b' =$$
$$= (a.a' - b.b') + (a.b' + a'.b)i$$

Nota: Si multiplicamos un número complejo por su conjugado obtenemos un número real: $z.\bar{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2.i^2 = a^2 + b^2$

DIVISIÓN: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi).(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(a.a'+b.b')+(b.a'-a.b')i}{a'^2+b'^2} = \frac{a.a'+b.b'}{a'^2+b'^2} + \frac{ba'-a.b'}{a'^2+b'^2}i$$

POTENCIAS DE i :

$i^0 = 1$; $i = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; ......
$i^n \Rightarrow$ se divide n entre cuatro y nos quedamos con el resto $(0,1,2,3) \Rightarrow i^n = i^r$

PROPIEDADES

La **suma** de números complejos cumple las propiedades **asociativa y conmutativa.**
El 0 es el **elemento neutro** de la **suma.**
Todos los números complejos tienen un **opuesto.**
La **multiplicación** de número complejo es, también, **asociativa y conmutativa.**
El 1 es el **elemento neutro del producto**
Todos los números complejos, a + bi, salvo el 0, tienen un **inverso**: 1/(a + bi)
Además, la multiplicación es **distributiva** respecto de la suma.

Con todas estas propiedades nos dicen que podemos operar con los complejos de la misma forma que con los reales.

6.3 – NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Módulo de un número complejo z es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Se designa por $r = |z|$

Argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo. Se designa: $\alpha = \arg(z)$ $(0^\circ \le \alpha \le 360^\circ)$

Número complejo en forma polar: $z = r_\alpha$

PASO DE FORMA BINÓMICA A FORMA POLAR

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} r = +\sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \begin{cases} \operatorname{arctag}\dfrac{b}{a} & \text{si } a \neq 0 \text{ (Teniendo en cuenta el cuadrante)} \\ 90^\circ & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ 270^\circ & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

PASO DE FORMA POLAR A FORMA BINÓMICA

$$z = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} \Rightarrow z = r\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\alpha . i$$

6.4 – OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

PRODUCTO: Al multiplicar dos números complejos en forma polar obtenemos otro número complejo en forma polar de módulo el producto de los módulos y de argumento la suma de los argumentos (reduciéndola a un ángulo entre 0° y 360°)

$r_\alpha . r'_{\alpha'} = (r\cos\alpha + r\,\mathrm{sen}\alpha\, i).(r'\cos\alpha' + r'\,\mathrm{sen}\alpha' i) = (r\cos\alpha . r'\cos\alpha' - r\,\mathrm{sen}\alpha . r'\,\mathrm{sen}\alpha') + (r\cos\alpha . r'\,\mathrm{sen}\alpha' + r\,\mathrm{sen}\alpha . r'\cos\alpha')i = rr'(\cos\alpha.\cos\alpha' - \mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\alpha') + rr'.(\cos\alpha.\mathrm{sen}\alpha' + \mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha')i = rr'\cos(\alpha+\alpha') + rr'.\mathrm{sen}(\alpha+\alpha') = rr'_{\alpha+\alpha'}$

POTENCIA: La potencia n-ésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo en forma polar de módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento el argumento multiplicado por n.

$(r_\alpha)^n = r_\alpha \ldots r_\alpha = (r \ldots r)_{\alpha + \ldots + \alpha} = (r^n)_{n\alpha}$

COCIENTE: El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo de módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los argumentos: $\dfrac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$

FÓRMULA DE MOIVRE

Aplicando las propiedades de la potencia de un número complejo, se obtiene la siguiente fórmula, llamada **fórmula de Moivre:**

$$(\cos\alpha + \mathrm{sen}\alpha\, i)^n = \cos n\alpha + \mathrm{sen}\, n\alpha\, i$$

que es útil en trigonometría, pues permite hallar cos nα y sen nα en función de cosα y sen α.

RADICALES

$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}} \quad k = 0,1,\ldots,n-1$

Dando los valores de k obtenemos la n raíces de dicho número complejo.

Para n > 2, los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen.

TEMA 6 - COMPLEJOS

EJERCICIO 1 : Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

a) $\dfrac{(3-i)i^3}{1-2i}$ b) $\dfrac{13i^4(2-i)}{3-2i}$ c) $\dfrac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$

d) $\dfrac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}$ e) $\dfrac{(3-i)^2}{1+i}$ f) $\dfrac{5i^{10}(1-i)}{3-i}$

EJERCICIO 2 :

a) Representa gráficamente el número $z=-1-i$ y halla su opuesto y su conjugado.

b) Expresa en forma polar $z=-1-i$.

EJERCICIO 3 : Considera el número complejo $z=2-2\sqrt{3}i$.

a) Represéntalo gráficamente y escribe su opuesto y su conjugado.

b) Expresa z en forma polar.

EJERCICIO 4 :

a) Expresa en forma binómica el número complejo $z=6_{210^\circ}$ y represéntalo gráficamente.

b) Escribe el opuesto y el conjugado de z.

EJERCICIO 5 : Calcula el valor de z^6, sabiendo que $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

EJERCICIO 6 : Calcula la cuarta potencia del número complejo $z=-2+2\sqrt{3}i$.

EJERCICIO 7 : Halla las raíces cuartas de 16 y represéntalas gráficamente. ¿Qué figura obtienes si unes los afijos de las raíces obtenidas?

EJERCICIO 8 :

Representa gráficamente los resultados de hallar $\sqrt[3]{1-i}$. ¿Qué figura obtenemos al unir los afijos de las raíces obtenidas?

EJERCICIO 9 : Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

EJERCICIO 10 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3z^4+27z^2=0$ b) $ix^3+8=0$ c) $2z^6+2=0$

EJERCICIO 11 :

Representa $z=2-2i$, su opuesto y su conjugado, y exprésalos en forma polar.

EJERCICIO 12 : Calcula z^8, sabiendo que $z=1+\sqrt{3}i$.

EJERCICIO 13 : Halla los números complejos, z, que cumplen la siguiente igualdad:
$z^3+64=0$

EJERCICIO 14 : Calcula: $\sqrt[4]{-81}$

EJERCICIO 15 : Halla un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces quintas es $2-2i$.

EJERCICIO 16

a) Dado el número complejo $z = 1-\sqrt{3}i$, escribe su opuesto y su conjugado, y representa los tres números.

b) Escribe z, $-z$ y $\bar{z}$ en forma polar.

EJERCICIO 17 : Escribe el opuesto y el conjugado de $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
Escribe los tres números en forma polar y represéntalos.

EJERCICIO 18

a) Escribe en forma binómica $z = 2_{30}$.

b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 19

a) Expresa en forma polar $z = \sqrt{3} - i$.

b) Escribe en forma binómica y en forma polar el opuesto y el conjugado de z.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 20 : Calcula:

a) $\dfrac{(2-3i)i^{25}}{(-1+2i)}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\dfrac{(1-3i)}{(3-4i)}+i^{37}$ d) $\sqrt[3]{2-2i}$ e) $\dfrac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$

f) $\sqrt[4]{-1}$ g) $\sqrt[3]{27i}$ h) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i}-i^{28}$ i) $\dfrac{(7-i)i^{43}}{-2+i}$ j) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

EJERCICIO 21 : Calcular x para que $\dfrac{x+9i}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

EJERCICIO 22 : El número complejo de módulo 12 y argumento 150° es el producto de dos número complejos, uno de los cuales es el número 4. Di cuál es el otro y exprésalo en forma binómica.

EJERCICIO 23 : El producto de un número complejo de argumento 60° por otro de módulo 5 nos da como resultado el número complejo $-6+6\sqrt{3}\,i$. Halla el módulo del primero y el argumento del segundo.

EJERCICIO 24 : Halla dos números complejos conjugados cuyo cociente sea un imaginario puro y su diferencia sea 4i.

EJERCICIO 25 : Un cuadrado con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto A(3,4). Calcular los demás vértices.

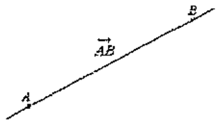
EJERCICIO 26 : Calcular dos números complejos cuya suma es un número real, su diferencia tiene por parte real –1 y su producto vale $15+3i$

TEMA 7 – VECTORES

7.1 – LOS VECTORES Y SUS OPERACIONES

DEFINICIÓN

Un vector es un segmento orientado. Un vector $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por dos puntos, **origen** A y **extremo** B.



Elementos de un vector:

- **Módulo** de un vector es la distancia entre A y B y se designa por el vector entre barras : $|\overrightarrow{AB}|$
- **Dirección** del vector es la dirección de la recta en la que se encuentra el vector y la de todas sus paralelas.
- **Sentido** si va de A a B o de B a A.

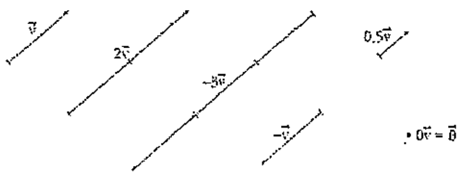
Igualdad de vectores: Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Todos ellos se llaman representantes de un único vector. Llamaremos representante canónico a aquel vector que tiene por origen el punto O.

Notación: Los vectores se representan por letras: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... o bien mediante uno de sus representantes, designando su origen y su extremo con una flecha encima $\overrightarrow{AB}$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $\overrightarrow{kv}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k : $|\overrightarrow{kv}| = |k|.|\vec{v}|$
- Dirección: la misma que la de $\vec{v}$
- Sentido:
  - El de $\vec{v}$ si $k > 0$
  - El del opuesto de $\vec{v}$ si $k < 0$



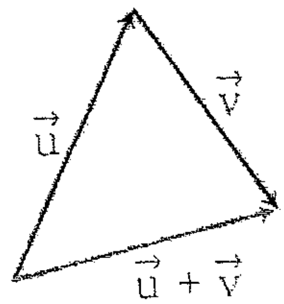
El producto 0. $\vec{v}$ es igual al **vector cero**: $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero y carece de dirección y de sentido.

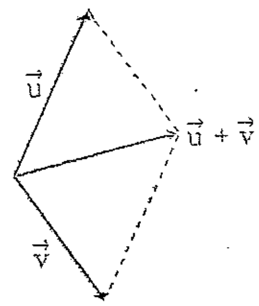
El vector –1. $\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$

SUMA DE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para sumarlos gráficamente hay dos posibilidades:

- Se sitúa el origen del segundo vector sobre el extremo del primero y el vector suma es el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo.
- Se sitúan los dos vectores con origen común. Se forma el paralelogramo que tiene por lados los dos vectores y la diagonal que parte del origen de los dos vectores es el vector suma.





RESTA DE DOS VECTORES

Restar dos vectores es lo mismo que sumar al primer vector el opuesto del segundo.

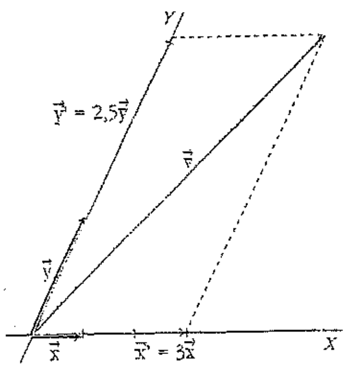
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y dos números a y b, el vector $a\vec{u} + b\vec{v}$ se dice que es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Notas:

- Cualquier vector se puede poner como combinación lineal de otros dos.
- Esta combinación lineal es única.



7.2 – COORDENADAS DE UN VECTOR. BASE

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con distintas dirección y no nulos forman una **base**, pues cualquier vector del plano se puede poner como combinación lineal de ellos.

Si los dos vectores de la base son perpendiculares entre si, se dice que forman una **base ortogonal**, y si además tienen módulo 1, se dice que forman una **base ortonormal**.

Coordenadas de un vector respecto de una base: Cualquier vector $\vec{w}$ se puede poner como combinación lineal de los elementos de una base B($\vec{x}$, $\vec{y}$) de forma única:

$$\vec{w} = a\,\vec{x} + b\,\vec{y}$$

A los números (a,b) se les llama coordenadas de $\vec{w}$ respecto de B.

Y se expresa así: $\vec{w} = (a,b)$ ó $\vec{w}\ (a,b)$

OPERACIONES CON COORDENADAS

SUMA DE DOS VECTORES

Las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de µ con las de v: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2) + (v_1,v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$

RESTA DE DOS VECTORES

Las coordenadas del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restando las coordenadas de µ con las de $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1,u_2) - (v_1,v_2) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

Las coordenadas del vector $k\,\vec{u}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{u}$

$$k\,\vec{u} = k.(u_1,u_2) = (ku_1,ku_2)$$

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = a(u_1,u_2) + b(v_1,v_2) = (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2)$

7.3 – PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

DEFINICIÓN

El producto es calar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un número que resulta de multiplicar el módulo de cada uno de los vectores por el coseno del ángulo que forman y se designa por $\vec{u}\cdot\vec{v}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

PROPIEDADES

- El producto escalar del vector o por otro vector cualquiera es el número 0
  Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Si dos vectores son perpendiculares, entonces su producto escalar es cero:
  Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, entonces son perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, con $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- El producto escalar de dos vectores es igual al producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, con signo + o – según si forman ángulo agudo o obtuso. Por tanto, llamaremos proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\vec{u}\,' = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$
- Propiedad conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Propiedad asociativa: $a.(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\,\vec{u}).\vec{v}$
- Propiedad distributiva: $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- Si $B(\vec{x},\vec{y})$ es una base ortogonal: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x} = 0$
- Si $B(\vec{x}\,.\,\vec{y})$ es una base ortonormal : $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x} = 0$, $\vec{x}\cdot\vec{x} = 1$, $\vec{y}\cdot\vec{y} = 1$

EXPRESIÓN ANALÍTICA (en una base ortonormal)

Si las coordenadas de los vectores u y v respecto a una base ortonormal son $\vec{u}\,(u_1,u_2)$ y $\vec{v}\,(v_1,v_2)$, entonces el producto escalar u.v adopta la siguiente expresión:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2$$

Dem : $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{x} + u_2\vec{y}).(v_1\vec{x} + v_2\vec{y}) = u_1.v_1.\ \vec{x}\cdot\vec{x} + u_1.v_2.\ \vec{x}\cdot\vec{y} + u_2.v_1.\ \vec{y}\cdot\vec{x} + u_2.v_2.\ \vec{y}\cdot\vec{y} = u_1.v_1 + u_2.v_2$

MÓDULO DE UN VECTOR (en una base ortonormal)

Expresión vectorial : $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{v},\vec{v}) = |\vec{v}|^2.\cos 0 = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Expresión cartesiana : $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

ÁNGULO DE DOS VECTORES (en una base ortonormal)

Expresión vectorial : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Expresión analítica : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} . \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

VECTOR ORTOGONAL A OTRO

Un vector ortogonal a (a,b) es (-b,a) ó (b,-a) "Si cambian de orden y una de signo".

VECTOR UNITARIO

Para convertir un vector en unitario, se divide cada una de las coordenadas por el módulo del vector: $\vec{u}(a,b) \Rightarrow$ Vector unitario $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

7.4 – ALGUNAS APLICACIONES DE LOS VECTORES

COORDENADAS DEL VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ se obtienen restándole a las coordenadas del extremo B las del origen A : $\overrightarrow{AB} = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2-x_1, y_2-y_1)$

CONDICIÓN PARA QUE TRES PUNTOS ESTÉN ALINEADOS

Los puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ están alineados siempre que los vectores AB y BC tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio, M, de un segmento de extremos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ son: $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right)$

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO

Para calcular el simétrico A' del punto A respecto del punto B, solo hay que tener en cuenta que el punto B es el punto medio entre A y A'.

TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

8.2 – ECUACIONES DE UNA RECTA

Para determinar una recta necesitamos una de estas dos condiciones

1. Un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{v} = (a,b)$

2. Dos puntos $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1) \rightarrow$ Un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{PQ}$

8.2.1 – ECUACIÓN VECTORIAL

$$(x,y) = (x_0, y_0) + t.(a,b) \qquad \forall t \in R$$

8.2.2 – ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\begin{cases} x = x \ \ + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

8.2.3 – ECUACIÓN CONTINUA

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

8.2.4 – ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

$$y - y_0 = \frac{b}{a}.(x - x_0) \qquad m = \frac{b}{a} = \text{pendiente}$$

8.2.5 – ECUACIÓN EXPLÍCITA

$$y = mx + n \quad \text{donde} \begin{cases} m & \text{es la pendiente} \\ n & \text{es la ordenada en el origen (lo que vale la y cuando } x = 0 \end{cases}$$

8.2.6 – ECUACIÓN IMPLÍCITA

$$a.y - y_0.a = b.x - b.x_0 \rightarrow bx - ay + a.y_0 - b.x_0 = 0 \rightarrow Ax + By + c = 0$$

$\vec{n} = (A,B) = (b,-a) =$ vector normal de la recta perpendicular al vector director.

NOTA

- $\vec{v} = (a,b) \rightarrow \vec{n} = (-b,a) \rightarrow \ m = b/a$
- $\vec{n} = (A,B) \rightarrow \vec{v} = (-B,A) \rightarrow \ m = -A/B$

8.3 – HAZ DE RECTAS

8.3.1 – HAZ DE RECTAS DE CENTRO P.

Al conjunto de todas las rectas que pasan por un punto P se le llama **haz de rectas de centro P.**

La expresión analítica del haz de rectas de centro $P(x_0,y_0)$ es : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

8.3.2 – HAZ DE RECTAS

Si lo que conocemos son dos rectas pertenecientes al haz: r: $ax + by + c = 0$, s: $a'x + b'y + c' = 0$, el haz ponerse así: $k(ax + by + c) + k'(a'x + b'y + c') = 0$

8.4 – PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

8.4.1 – RECTAS PARALELAS

- Vectores directores paralelos (proporcionales)
- Vectores normales paralelos (proporcionales)
- Misma pendiente ($m_1 = m_2$)

8.4.2 – RECTAS PERPENDICULARES

- Vectores directores perpendiculares (producto escalar nulo)
- Vectores normales perpendiculares (producto escalar nulo)
- Producto de las pendientes igual a –1 ($m_1.m_2 = -1$)

8.5 – POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

	FORMA GENERAL r : $Ax + By + C = 0$ r': $A'x + B'y + C' = 0$	FORMA EXPLÍCITA $y = m.x + n$ $y = m'.x + n'$	RESOLVER EL SISTEMA
COINCIDENTES	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$m = m'$ $n = n'$	Infinitas soluciones
PARALELAS	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$m = m'$ $n \neq n'$	No tiene solución
SECANTES	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$m \neq m'$	Una solución

8.6 – ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

8.6.1 – SI TENEMOS SUS VECTORES DIRECTORES O NORMALES

$$\cos(r,s) = \begin{cases} \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \dfrac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} \\ \cos(\vec{n}_r, \vec{n}_s) = \dfrac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}_s|} \end{cases}$$

8.6.2 – SI TENEMOS SUS PENDIENTES

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma con el eje OX^+

$$\text{tag}(\beta - \alpha) = \left|\frac{\text{tag}\beta - \text{tag}\alpha}{1 + \text{tag}\beta.\text{tag}\alpha}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right| \quad \text{(2 soluciones)}$$

8.7 – DISTANCIAS

8.7.1 – DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que une dichos puntos

$P(x_0, y_0)$, $Q(x_1,y_1)$ $\rightarrow d(P,Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

8.7.2 – DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$d(\,P(x_0,y_0),\ Ax + By + C = 0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.7.3 – DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

$$d(\,Ax + By + C = 0,\ Ax + By + C' = 0) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJERCICIO 1: Dada la recta que pasa por P(-2,0) y tiene por vector director $\vec{v}$ (2,2). Escribir su ecuación en todas las formas posibles.

EJERCICIO 2:Escribir en forma vectorial y general las ecuaciones de las rectas:

a) $\begin{cases} x = -2-3t \\ y = 1+2t \end{cases}$ b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-5}$ c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$

EJERCICIO 3: Dada la recta $\dfrac{x+6}{2} = \dfrac{y-1}{-2}$ elige un vector director y un punto de dicha recta. Escríbela en todas, sus formas.

EJERCICIO 4: Escribe en todas sus formas la ecuación de la recta que pasa por M(3,1) N(-2,4)

EJERCICIO 5: Calcular el vector director de la recta $2x + 3y - 4 = 0$

EJERCICIO 6: Calcula m para que la recta $2mx - m^2y + 2m + 9 = 0$ pase por el punto (-1,1)

EJERCICIO 7: Dadas las rectas: a) $3x - 2y + 5$ b) $y = (5/3)x - 2$
Encuentra su vector director y su pendiente.

EJERCICIO 8: Comprueba si los puntos A(2,6), B(-1,3) y Q-4,0) están alineados

EJERCICIO 9: Dada la recta $3x + 6y + 7 = 0$ determinar:
a) Vector director
b) Pendiente
c) Distancia del origen de coordenadas a la recta.

EJERCICIO 10: Dada la recta de ecuación r :$4x + 3y + 3 = 0$
a) Calcular su pendiente
b) Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a r que se encuentran a dos unidades de distancia.

EJERCICIO 11: Calcular el valor de m para que las rectas r: $2x+my-4 = 0$ y s: $y = 3x+1$ sean:
a. Paralelas b. Perpendiculares

EJERCICIO 12: Hallar la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas y pasa por el punto (4,5).

EJERCICIO 13: Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a $2x+3y-4 = 0$ que disten 2 unidades M punto (5,7). (Ayuda: Existen dos)

EJERCICIO 14: Ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x - 3$ y que pasa por el punto de corte de las rectas: r : $x + 2y = 0$
r': $x = -t$; $y = -5 + 3t$

EJERCICIO 15 : Determinar las coordenadas de un punto P, sabiendo que pertenece a la recta $x - y + 1 = 0$ y dista 5 unidades del origen.

EJERCICIO 16: Dadas las rectas r: $mx + 2y + 6 = 0$ s: $nx + y = 9$

Hallar el valor de m y de n para que sean paralelas y la recta s pase por el punto (18,0)

EJERCICIO 17:
a) Calcular la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A(2,1) y B(4,-3)
b) Calcular su pendiente
c) Calcular una recta perpendicular a la recta r del apartado a) que pase por el punto (2,0)
d) Distancia de la recta r al punto (1,0)
e) Ángulo que forma la recta r con la recta $x + y + 2 = 0$

EJERCICIO 18: Sea la recta r:x+y-5=0 y el punto P(6,2)

a) Ecuación de un recta paralela a r situada a una distancia de $3.\sqrt{2}/2$

b) Ángulo que forma la recta r con la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto P.

EJERCICIO 19: Dada la recta de ecuación r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$

a) Calcular su pendiente

b) Calcular su ecuación segmentaria

c) Calcular una recta que forme con r un ángulo de 45a y pase por el punto (2,-1).

d) Calcular la ecuación de las rectas paralelas a "r" a dos unidades de distancia.

EJERCICIO 20: Dada la recta r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 3$

Calcular una recta paralela y otra perpendicular a la recta r por el punto de intersección de las rectas r': $y = 2x - 1$ r'': $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1}$

EJERCICIO 21: Dada la recta r: x - y + 3 = 0

Calcular la distancia del punto de corte de las rectas s : $2x + y = 0$ m : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 6 \end{cases}$ a la recta r.

EJERCICIO 22 :

a) Calcular m para que las rectas r : 2x + my - 4 = 0 y s : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ sean :

a.l) Paralelas a. 2) Perpendiculares

b) Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a r : $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2}$ que distan dos unidades del punto P(5,7).

c) Calcular la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45° con r : 2x + 3y = 2 y pasa por el punto de ordenada en el origen -3.

EJERCICIO 23: Dada la recta r: x+2y= 6

a) Calcular el simétrico del punto A(3,0) respecto de r.

b) Calcular la recta simétrica de r" respecto de r.

EJERCICIO 24: Calcular el simétrico del punto (2,1) respecto de la recta: 4x +3y+3 = 0

EJERCICIO 25:

a) Ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos A(1,-2) y B(3,0) y el ángulo que forma esa mediatriz con el eje OX.

b) Calcular el área y el ortocentro del triángulo de vértices A(1, l), B(4,2), C = (3,5).

EJERCICIO 26: En un triángulo ABC el vértice A es (2,5) y el punto medio de BC es (3, 1) y el punto medio del lado AB es (0,4).

a) Hallar los vértices B y C

b) Hallar el área del triángulo

c) Calcular la ecuación de la recta altura correspondiente al vértice A d) Calcular las coordenadas del circuncentro.

EJERCICIO 27: Sea un paralelogramo de vértices A = (7,4), B = (2,2), C = (3,5). Calcular el cuarto vértice, su área y su perímetro y la ecuación de una de sus diagonales.

EJERCICIO 28: En un triángulo ABC, el vértice A tiene de coordenadas (2,5). El punto medio de BC es (3, 1) y el punto medio del lado AB es (0,4). Calcular:

a) Los vértices B y C

b) El área del triángulo.

25 Calcula a sabiendo que $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = (\sqrt{2}, 1)$ forman un ángulo de 30°.

Solución: $a = 12\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

26 Si $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Solución: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$

27 Sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo y que $\vec{u} = (3x, y)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

Solución: 90°

28 Dados los vectores $\vec{v} = (7, 4)$ y $\vec{w} = (4, x)$, calcula x para que estos:

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Formen un ángulo de 30°.

Solución: ***a)*** $x = -7$ ***b)*** $x = 16/7$ ***c)*** $x = 6{,}86; x = -0{,}02$

29 Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3, 7)$.

Solución: $\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = 13/\sqrt{58}$

30 Dado el vector $\vec{u} = (-3, 6)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.

Solución: $9\sqrt{5}$

31 Dados los puntos $A(7, 0)$, $B(4, 6)$ y $C(-1, -1)$, calcula las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ y comprueba que la suma de ambas es igual al módulo de $\overrightarrow{AC}$.

Solución: $\text{proy}_{\overrightarrow{AC}}(AB) = 18/\sqrt{65}$; $\text{proy}_{\overrightarrow{CA}}(CB) = 47/\sqrt{65}$

Aplicaciones de los vectores

32 Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(1, -2)$, calcula:

a) La longitud del lado AB.

b) La longitud del lado AC.

c) El ángulo A.

d) El área del triángulo.

Solución: ***a)*** 5 u ***b)*** $2\sqrt{2}$ u ***c)*** 81° 52′11,63″ ***d)*** 7 u²

33 Dado el triángulo de vértices $A(-3, 7)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 15)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.

Solución: Área $= 32{,}5$ u²; $A = 90°$

34 Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(-3, 5)$ y $C(1, 3)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.

Solución: Área $= 10$ u²; $A = 45°$

Ecuaciones de la recta

35 Determina si los siguientes puntos están alineados y, en el caso de que lo estén, averigua la ecuación de la recta a la que pertenecen.

a) $A(1, 6)$, $B(-2, 0)$ y $C(1/2, 5)$

b) $A(1, 2)$, $B(-3, 3)$ y $C(-1, 4)$

36 Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 2)$ y $B(-6, 0)$. Exprésala de todas las formas posibles.

37 ¿Qué podrías decir acerca de una recta cuyo vector director es $(1, 1)$?

38 Si $A(2, 7)$, $B(8, -3)$ y $C(0, -10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, determina las coordenadas del vértice D. A continuación, averigua las del punto en el que se cortan sus diagonales.

Solución: $D(-6, 0)$. Las diagonales se cortan en $M(1, -3/2)$

39 Los puntos $A(0, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 4)$ son tres vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice y las ecuaciones de sus diagonales.

Solución: $D(-3, 2)$

40 Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = a - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, halla el valor de a para que $(-4, 7)$ pertenezca a r.

Solución: $a = 4$

41 Calcula b para que la recta $x + by - 7 = 0$ pase por el punto de intersección de estas rectas:

$$r: (x, y) = (-7, 0) + \lambda(5, 1),\ s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 4 \end{cases}$$

Solución: $b = 2$

42 Dados los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(0, 3)$ y la recta r de ecuación $x + y - 2 = 0$, calcula las coordenadas de un punto C de la recta que esté alineado con A y B.

Solución: $C(1, 1)$

Posiciones relativas de rectas

43 Calcula la ecuación de una recta paralela a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma vectorial y paramétrica.

44 Sean r y s las dos rectas del plano de ecuaciones:

$$r: 2x - y - 3 = 0,\ s: \frac{x + 1}{4} = \frac{y + 2}{2}$$

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s, y es paralela a la recta de ecuación que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-3, 2)$.

45 Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma continua y explícita.

46 Considera la recta de ecuación $y = -7x + 5$. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por $(-7, 5)$.

Solución: $P(-7/50, 299/50)$

47 Dadas las siguientes rectas:

$$r: 5x - y + 4 = 0,\ s: \begin{cases} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases},\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

determina el valor de m para que las rectas r y s sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

c) Coincidentes.

Solución: ***a)*** $m = -1/5$ ***b)*** $m = 5$ ***c)*** No pueden ser coincidentes

48 Los puntos $A(1, 2)$ y $D(5, 4)$ representan los vértices opuestos de un cuadrado:

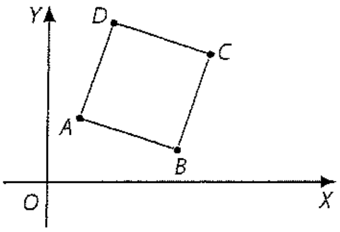


FIGURA 6.36.

a) Calcula el punto medio, M, de la diagonal, AD, del cuadrado (M será el centro del cuadrado).

b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la diagonal AD.

c) Calcula las coordenadas de los otros dos vértices B y C del cuadrado.

Solución: *a)* $M(3, 3)$ *c)* $B(4, 1), C(2, 5)$

49 Explica la condición que han de verificar A y B si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$:

a) Son perpendiculares.

b) Son paralelas.

50 Sea r la recta de ecuación $3x - 5y + 2 = 0$. Determina las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a r que pasen por el punto $(-15, 4)$.

51 Dada la recta de ecuación $3x - 5y + 7 = 0$, determina la ecuación de la recta perpendicular que corta el eje de ordenadas en $y = 3$.

52 Determina el valor de a para que las rectas de ecuaciones $x - 5ay = 1$ y $2x + 3y = 1$ sean:

a) Paralelas. *b)* Perpendiculares.

Solución: *a)* $a = -3/10$ *b)* $a = 2/15$

53 Determina el valor de m para que $r: x - y + 4 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 3 + m\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ sean:

a) Paralelas. *b)* Perpendiculares.

Solución: *a)* $m = -4$ *b)* $m = 4$

54 Dadas $r: 2x + my - 7 = 0$ y $s: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 7 + n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, sabiendo que s pasa por $P(13, 8)$, determina m y n en los siguientes casos:

a) Si r y s son paralelas.

b) Si r y s son perpendiculares.

Solución: *a)* $n = 5/16, m = -32$ *b)* $n = 5/16, m = 1/8$

55 De un rombo $ABCD$ conocemos las coordenadas de tres vértices: A es el origen de coordenadas, $B(4, 1)$ y $D(1, 4)$.

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice, C.

b) Comprueba, analíticamente, que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio.

Solución: *a)* $C(5, 5)$

56 Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(1/6, 1)$ respecto del punto $P(1, -4)$.

Solución: $A'(11/6, -9)$

57 Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $P(2, 2)$ respecto de la recta $x - 2y - 5 = 0$.

Solución: $P'(24/5, -18/5)$

58 Calcula el punto simétrico de $A(0, 4)$ respecto de la recta $3x - y + 1 = 0$.

Solución: $A'(9/5, 17/5)$

59 Calcula el punto simétrico de $A(-2, -1)$ respecto de la recta $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Solución: $A'(8, 5)$

60 Determina la ecuación de la recta simétrica de $r: x + y - 1 = 0$ respecto de la recta $s: x - 2y + 3 = 0$.

Distancias y áreas

61 Halla el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ si $A = (3, 4)$; B es el punto simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante; C, el simétrico de B respecto del eje de ordenadas, y D, el simétrico de C respecto del eje de abscisas.

Solución: $P = 16 + 6\sqrt{2}$ u

62 Halla la distancia del punto $P(2, 2)$ a la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $Q(3, 4)$.

Solución: $d = 2$ u

63 Considera el triángulo formado por las rectas de ecuaciones $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y el eje de ordenadas. Calcula su perímetro y su área.

Solución: $P = 5 + 3\sqrt{5}$ u; $A = 5$ u^2

64 Calcula la distancia entre les rectas $4x - 3y + 7 = 0$ y $8x - 6y = 0$.

Solución: $d = 1{,}4$ u

65 Determina, sin efectuar cálculos, la distancia entre las rectas $3x + 2y - 5 = 0$ y $2x - 5y + 1 = 0$.

Solución: $d = 0$ u

66 Dadas las rectas $ax + (a + 2)y = a + 2$ y $x + ay = 3$, donde a es un parámetro.

a) Calcula un vector director de cada una de estas rectas.

b) Halla los valores de a para los que las rectas son paralelas.

c) Calcula los valores de a para los cuales las rectas son perpendiculares.

d) Calcula la distancia que hay entre las dos rectas cuando $a = 2$.

Solución: *a)* $\vec{v}_r = (-a - 2, a), \vec{v}_s = (-a, 1)$ *b)* $a = 2, a = -1$ *c)* $a = 0, a = -3$ *d)* $d = 1/\sqrt{5}$ u

67 Considera la recta de ecuación $y = -2x + 2$.

a) Averigua las coordenadas del punto de intersección de esta recta con su recta perpendicular que pasa por $(6, 3)$.

b) Halla la ecuación de la paralela que contiene $(3, 5)$.

c) Calcula la distancia entre las dos rectas paralelas.

Solución: *a)* $P(4/5, 2/5)$ *c)* $d = 9/\sqrt{5}$ u

68 Determina si es equilátero, isósceles o rectángulo el triángulo cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 5)$. Averigua el valor de la altura correspondiente al vértice A y utilízalo para calcular el área del triángulo.

Solución: $h = 5\sqrt{2}/2$; $A = 12{,}5$ u^2

TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

8.2 – ECUACIONES DE UNA RECTA

Para determinar una recta necesitamos una de estas dos condiciones

1. Un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{v} = (a,b)$

2. Dos puntos $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1) \rightarrow$ Un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{PQ}$

8.2.1 – ECUACIÓN VECTORIAL

$$(x,y) = (x_0, y_0) + t.(a,b) \qquad \forall t \in R$$

8.2.2 – ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\begin{cases} x = x + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

8.2.3 – ECUACIÓN CONTINUA

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

8.2.4 – ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

$$y - y_0 = \frac{b}{a}.(x - x_0) \qquad m = \frac{b}{a} = \text{pendiente}$$

8.2.5 – ECUACIÓN EXPLÍCITA

$$y = mx + n \quad \text{donde} \begin{cases} m & \text{es la pendiente} \\ n & \text{es la ordenada en el origen (lo que vale la y cuando } x = 0 \end{cases}$$

8.2.6 – ECUACIÓN IMPLÍCITA

$$a.y - y_0.a = b.x - b.x_0 \rightarrow bx - ay + a.y_0 - b.x_0 = 0 \rightarrow Ax + By + c = 0$$

$\vec{n} = (A,B) = (b,-a)$ = vector normal de la recta perpendicular al vector director.

NOTA

- $\vec{v} = (a,b) \rightarrow \vec{n} = (-b,a) \rightarrow \ m = b/a$
- $\vec{n} = (A,B) \rightarrow \vec{v} = (-B,A) \rightarrow \ m = -A/B$

0,35

8.3 – HAZ DE RECTAS

8.3.1 – HAZ DE RECTAS DE CENTRO P.

Al conjunto de todas las rectas que pasan por un punto P se le llama **haz de rectas de centro P.**

La expresión analítica del haz de rectas de centro $P(x_o, y_o)$ es : $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

8.3.2 – HAZ DE RECTAS

Si lo que conocemos son dos rectas pertenecientes al haz: r: $ax + by + c = 0$, s: $a'x + b'y + c' = 0$, el haz ponerse así: $k(ax + by + c) + k'(a'x + b'y + c') = 0$

8.4 – PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

8.4.1 – RECTAS PARALELAS

- Vectores directores paralelos (proporcionales)
- Vectores normales paralelos (proporcionales)
- Misma pendiente ($m_1 = m_2$)

8.4.2 – RECTAS PERPENDICULARES

- Vectores directores perpendiculares (producto escalar nulo)
- Vectores normales perpendiculares (producto escalar nulo)
- Producto de las pendientes igual a –1 ($m_1.m_2 = -1$)

8.5 – POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

	FORMA GENERAL r : $Ax + By + C = 0$ r': $A'x + B'y + C' = 0$	FORMA EXPLÍCITA $y = m.x + n$ $y = m'.x + n'$	RESOLVER EL SISTEMA
COINCIDENTES	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$m = m'$ $n = n'$	Infinitas soluciones
PARALELAS	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$m = m'$ $n \neq n'$	No tiene solución
SECANTES	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$m \neq m'$	Una solución

8.6 – ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

8.6.1 – SI TENEMOS SUS VECTORES DIRECTORES O NORMALES

$$\cos(r,s) = \begin{cases} \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \dfrac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} \\[2ex] \cos(\vec{n}_r, \vec{n}_s) = \dfrac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}_s|} \end{cases}$$

8.6.2 – SI TENEMOS SUS PENDIENTES

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma con el eje OX^+

$$\text{tag}(\beta - \alpha) = \left|\frac{\text{tag}\beta - \text{tag}\alpha}{1 + \text{tag}\beta.\text{tag}\alpha}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right| \quad \text{(2 soluciones)}$$

8.7 – DISTANCIAS

8.7.1 – DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que une dichos puntos

$P(x_0, y_0)$, $Q(x_1,y_1)$ $\rightarrow d(P,Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

8.7.2 – DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$d(P(x_0,y_0),\ Ax + By + C = 0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.7.3 – DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

$$d(Ax + By + C = 0,\ Ax + By + C' = 0) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJERCICIO 1: Dada la recta que pasa por P(-2,0) y tiene por vector director $\vec{v}$ (2,2). Escribir su ecuación en todas las formas posibles.

EJERCICIO 2: Escribir en forma vectorial y general las ecuaciones de las rectas:

a) $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-5}$ c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$

EJERCICIO 3: Dada la recta $\dfrac{x+6}{2} = \dfrac{y-1}{-2}$ elige un vector director y un punto de dicha recta. Escríbela en todas, sus formas.

EJERCICIO 4: Escribe en todas sus formas la ecuación de la recta que pasa por M(3,1) N(-2,4)

EJERCICIO 5: Calcular el vector director de la recta $2x + 3y - 4 = 0$

EJERCICIO 6: Calcula m para que la recta $2mx - m^2y + 2m + 9 = 0$ pase por el punto (-1,1)

EJERCICIO 7: Dadas las rectas: a) $3x - 2y + 5$ b) $y = (5/3)x - 2$
Encuentra su vector director y su pendiente.

EJERCICIO 8: Comprueba si los puntos A(2,6), B(-1,3) y Q-4,0) están alineados

EJERCICIO 9: Dada la recta $3x + 6y + 7 = 0$ determinar:
a) Vector director
b) Pendiente
c) Distancia del origen de coordenadas a la recta.

EJERCICIO 10: Dada la recta de ecuación $r: 4x + 3y + 3 = 0$
a) Calcular su pendiente
b) Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a r que se encuentran a dos unidades de distancia.

EJERCICIO 11: Calcular el valor de m para que las rectas r: $2x+my-4 = 0$ y s: $y = 3t+1$ sean:
a. Paralelas b. Perpendiculares

EJERCICIO 12: Hallar la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas y pasa por el punto (4,5).

EJERCICIO 13: Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a $2x+3y-4 = 0$ que disten 2 unidades M punto (5,7). (Ayuda: Existen dos)

EJERCICIO 14: Ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x - 3$ y que pasa por el punto de corte de las rectas: $r: x + 2y = 0$
$r': x = -t; \quad y = -5 + 3t$

EJERCICIO 15 : Determinar las coordenadas de un punto P, sabiendo que pertenece a la recta $x - y + 1 = 0$ y dista 5 unidades del origen.

EJERCICIO 16: Dadas las rectas r: $mx + 2y + 6 = 0$ s: $nx + y = 9$

Hallar el valor de m y de n para que sean paralelas y la recta s pase por el punto (18,0)

EJERCICIO 17:
a) Calcular la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A(2,1) y B(4,-3)
b) Calcular su pendiente
c) Calcular una recta perpendicular a la recta r del apartado a) que pase por el punto (2,0)
d) Distancia de la recta r al punto (1,0)
e) Ángulo que forma la recta r con la recta $x + y + 2 = 0$

EJERCICIO 18: Sea la recta r:x+y-5=0 y el punto P(6,2)

a) Ecuación de un recta paralela a r situada a una distancia de $3.\sqrt{2}/2$

b) Ángulo que forma la recta r con la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto P.

EJERCICIO 19: Dada la recta de ecuación r: $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2t \end{cases}$

a) Calcular su pendiente

b) Calcular su ecuación segmentaria

c) Calcular una recta que forme con r un ángulo de 45a y pase por el punto (2,-1).

d) Calcular la ecuación de las rectas paralelas a "r" a dos unidades de distancia.

EJERCICIO 20: Dada la recta r: $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=3$

Calcular una recta paralela y otra perpendicular a la recta r por el punto de intersección de las rectas r': $y = 2x-1$ r'': $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}$

EJERCICIO 21: Dada la recta r: x - y + 3 = 0

Calcular la distancia del punto de corte de las rectas s : $2x+y=0$ m : $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-6 \end{cases}$ a la recta r.

EJERCICIO 22 :

a) Calcular m para que las rectas r : 2x + my - 4 = 0 y s : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t+1 \end{cases}$ sean :

a.1) Paralelas a. 2) Perpendiculares

b) Calcular las ecuaciones de las rectas paralelas a r : $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{2}$ que distan dos unidades del punto P(5,7).

c) Calcular la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45° con r : 2x + 3y = 2 y pasa por el punto de ordenada en el origen -3.

EJERCICIO 23: Dada la recta r: x+2y= 6

a) Calcular el simétrico del punto A(3,0) respecto de r.

b) Calcular la recta simétrica de r" respecto de r.

EJERCICIO 24: Calcular el simétrico del punto (2,1) respecto de la recta: 4x +3y+3 = 0

EJERCICIO 25:

a) Ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos A(1,-2) y B(3,0) y el ángulo que forma esa mediatriz con el eje OX.

b) Calcular el área y el ortocentro del triángulo de vértices A(1, 1), B(4,2), C = (3,5).

EJERCICIO 26: En un triángulo ABC el vértice A es (2,5) y el punto medio de BC es (3, 1) y el punto medio del lado AB es (0,4).

a) Hallar los vértices B y C

b) Hallar el área del triángulo

c) Calcular la ecuación de la recta altura correspondiente al vértice A d) Calcular las coordenadas del circuncentro.

EJERCICIO 27: Sea un paralelogramo de vértices A = (7,4), B = (2,2), C = (3,5). Calcular el cuarto vértice, su área y su perímetro y la ecuación de una de sus diagonales.

EJERCICIO 28: En un triángulo ABC, el vértice A tiene de coordenadas (2,5). El punto medio de BC es (3, 1) y el punto medio del lado AB es (0,4). Calcular:

a) Los vértices B y C

b) El área del triángulo.

25 Calcula a sabiendo que $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = (\sqrt{2}, 1)$ forman un ángulo de 30°.

Solución: $a = 12\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

26 Si $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Solución: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$

27 Sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo y que $\vec{u} = (3x, y)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

Solución: 90°

28 Dados los vectores $\vec{v} = (7, 4)$ y $\vec{w} = (4, x)$, calcula x para que estos:

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Formen un ángulo de 30°.

Solución: *a)* $x = -7$ *b)* $x = 16/7$ *c)* $x = 6{,}86; x = -0{,}02$

29 Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3, 7)$.

Solución: $\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = 13/\sqrt{58}$

30 Dado el vector $\vec{u} = (-3, 6)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.

Solución: $9\sqrt{5}$

31 Dados los puntos $A(7, 0)$, $B(4, 6)$ y $C(-1, -1)$, calcula las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ y comprueba que la suma de ambas es igual al módulo de $\overrightarrow{AC}$.

Solución: $\text{proy}_{\overrightarrow{AC}}(AB) = 18/\sqrt{65}$; $\text{proy}_{\overrightarrow{AC}}(CB) = 47/\sqrt{65}$

Aplicaciones de los vectores

32 Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(1, -2)$, calcula:

a) La longitud del lado AB. *c)* El ángulo A.

b) La longitud del lado AC. *d)* El área del triángulo.

Solución: *a)* 5 u *b)* $2\sqrt{2}$ u *c)* 81° 52′ 11,63″ *d)* 7 u²

33 Dado el triángulo de vértices $A(-3, 7)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 15)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.

Solución: Área = 32,5 u²; $A = 90°$

34 Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(-3, 5)$ y $C(1, 3)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.

Solución: Área = 10 u²; $A = 45°$

Ecuaciones de la recta

35 Determina si los siguientes puntos están alineados y, en el caso de que lo estén, averigua la ecuación de la recta a la que pertenecen.

a) $A(1, 6)$, $B(-2, 0)$ y $C(1/2, 5)$

b) $A(1, 2)$, $B(-3, 3)$ y $C(-1, 4)$

36 Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 2)$ y $B(-6, 0)$. Exprésala de todas las formas posibles.

37 ¿Qué podrías decir acerca de una recta cuyo vector director es $(1, 1)$?

38 Si $A(2, 7)$, $B(8, -3)$ y $C(0, -10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, determina las coordenadas del vértice D. A continuación, averigua las del punto en el que se cortan sus diagonales.

Solución: $D(-6, 0)$. Las diagonales se cortan en $M(1, -3/2)$

39 Los puntos $A(0, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 4)$ son tres vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice y las ecuaciones de sus diagonales.

Solución: $D(-3, 2)$

40 Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = a - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, halla el valor de a para que $(-4, 7)$ pertenezca a r.

Solución: $a = 4$

41 Calcula b para que la recta $x + by - 7 = 0$ pase por el punto de intersección de estas rectas:

$$r: (x, y) = (-7, 0) + \lambda(5, 1),\ s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 4 \end{cases}$$

Solución: $b = 2$

42 Dados los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(0, 3)$ y la recta r de ecuación $x + y - 2 = 0$, calcula las coordenadas de un punto C de la recta que esté alineado con A y B.

Solución: $C(1, 1)$

Posiciones relativas de rectas

43 Calcula la ecuación de una recta paralela a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma vectorial y paramétrica.

44 Sean r y s las dos rectas del plano de ecuaciones:

$$r: 2x - y - 3 = 0,\ s: \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2}$$

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s, y es paralela a la recta de ecuación que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-3, 2)$.

45 Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma continua y explícita.

46 Considera la recta de ecuación $y = -7x + 5$. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por $(-7, 5)$.

Solución: $P(-7/50, 299/50)$

47 Dadas las siguientes rectas:

$$r: 5x - y + 4 = 0,\ s: \begin{cases} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases},\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

determina el valor de m para que las rectas r y s sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

c) Coincidentes.

Solución: *a)* $m = -1/5$ *b)* $m = 5$ *c)* No pueden ser coincidentes

48 Los puntos $A(1, 2)$ y $D(5, 4)$ representan los vértices opuestos de un cuadrado:

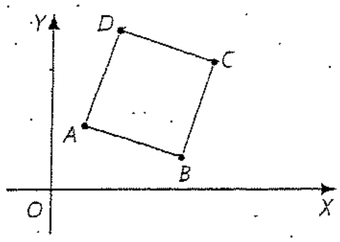


FIGURA 6.36.

a) Calcula el punto medio, M, de la diagonal, AD, del cuadrado (M será el centro del cuadrado).

b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la diagonal AD.

c) Calcula las coordenadas de los otros dos vértices B y C del cuadrado.

Solución: *a)* $M(3, 3)$ *c)* $B(4, 1)$, $C(2, 5)$

49 Explica la condición que han de verificar A y B si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$:

a) Son perpendiculares.

b) Son paralelas.

50 Sea r la recta de ecuación $3x - 5y + 2 = 0$. Determina las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a r que pasen por el punto $(-15, 4)$.

51 Dada la recta de ecuación $3x - 5y + 7 = 0$, determina la ecuación de la recta perpendicular que corta el eje de ordenadas en $y = 3$.

52 Determina el valor de a para que las rectas de ecuaciones $x - 5ay = 1$ y $2x + 3y = 1$ sean:

a) Paralelas. *b)* Perpendiculares.

Solución: *a)* $a = -3/10$ *b)* $a = 2/15$

53 Determina el valor de m para que $r: x - y + 4 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 3 + m\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ sean:

a) Paralelas. *b)* Perpendiculares.

Solución: *a)* $m = -4$ *b)* $m = 4$

54 Dadas $r: 2x + my - 7 = 0$ y $s: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 7 + n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, sabiendo que s pasa por $P(13, 8)$, determina m y n en los siguientes casos:

a) Si r y s son paralelas.

b) Si r y s son perpendiculares.

Solución: *a)* $n = 5/16, m = -32$ *b)* $n = 5/16, m = 1/8$

55 De un rombo $ABCD$ conocemos las coordenadas de tres vértices: A es el origen de coordenadas, $B(4, 1)$ y $D(1, 4)$.

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice, C.

b) Comprueba, analíticamente, que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio.

Solución: *a)* $C(5, 5)$

56 Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(1/6, 1)$ respecto del punto $P(1, -4)$.

Solución: $A'(11/6, -9)$

57 Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $P(2, 2)$ respecto de la recta $x - 2y - 5 = 0$.

Solución: $P'(24/5, -18/5)$

58 Calcula el punto simétrico de $A(0, 4)$ respecto de la recta $3x - y + 1 = 0$.

Solución: $A'(9/5, 17/5)$

59 Calcula el punto simétrico de $A(-2, -1)$ respecto de la recta $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Solución: $A'(8, 5)$

60 Determina la ecuación de la recta simétrica de $r: x + y - 1 = 0$ respecto de la recta $s: x - 2y + 3 = 0$.

Distancias y áreas

61 Halla el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ si $A = (3, 4)$; B es el punto simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante; C, el simétrico de B respecto del eje de ordenadas, y D, el simétrico de C respecto del eje de abscisas.

Solución: $P = 16 + 6\sqrt{2}$ u

62 Halla la distancia del punto $P(2, 2)$ a la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $Q(3, 4)$.

Solución: $d = 2$ u

63 Considera el triángulo formado por las rectas de ecuaciones $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y el eje de ordenadas. Calcula su perímetro y su área.

Solución: $P = 5 + 3\sqrt{5}$ u; $A = 5$ u^2

64 Calcula la distancia entre les rectas $4x - 3y + 7 = 0$ y $8x - 6y = 0$.

Solución: $d = 1{,}4$ u

65 Determina, sin efectuar cálculos, la distancia entre las rectas $3x + 2y - 5 = 0$ y $2x - 5y + 1 = 0$.

Solución: $d = 0$ u

66 Dadas las rectas $ax + (a + 2)y = a + 2$ y $x + ay = 3$, donde a es un parámetro.

a) Calcula un vector director de cada una de estas rectas.

b) Halla los valores de a para los que las rectas son paralelas.

c) Calcula los valores de a para los cuales las rectas son perpendiculares.

d) Calcula la distancia que hay entre las dos rectas cuando $a = 2$.

Solución: *a)* $\vec{v}_r = (-a - 2, a), \vec{v}_s = (-a, 1)$ *b)* $a = 2, a = -1$ *c)* $a = 0, a = -3$ *d)* $d = 1/\sqrt{5}$ u

67 Considera la recta de ecuación $y = -2x + 2$.

a) Averigua las coordenadas del punto de intersección de esta recta con su recta perpendicular que pasa por $(6, 3)$.

b) Halla la ecuación de la paralela que contiene $(3, 5)$.

c) Calcula la distancia entre las dos rectas paralelas.

Solución: *a)* $P(4/5, 2/5)$ *c)* $d = 9/\sqrt{5}$ u

68 Determina si es equilátero, isósceles o rectángulo el triángulo cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 5)$. Averigua el valor de la altura correspondiente al vértice A y utilízalo para calcular el área del triángulo.

Solución: $h = 5\sqrt{2}/2$; $A = 12{,}5$ u^2

TEMA 10 - FUNCIONES ELEMENTALES

10.1 – CONCEPTO DE FUNCIÓN

DEFINICIÓN : f es una **función de R en R** si a cada número real, $x \in$ Dom, le hace corresponder un único número real, f(x):

Lo denotamos por : f : Dom -----> R
x -----> y = f(x)

El conjunto Dom de los valores que puede tomar la variable independiente, "x", se llama **dominio de definición de la función.**

El conjunto de los valores que toma la función se llama **recorrido.**

Puesto que tanto la variable "x" como la función "f(x)" toman valores reales, estas funciones se llaman **funciones reales de variable real.**

RAZONES POR LAS QUE EL DOMINO DE DEFINICIÓN PUEDE RESTRINGIRSE :
- Imposible de realizar alguna operación con ciertos valores de x: denominadores que se anulan, raíces cuadradas de números negativos,....
- Contexto real del que se ha extraído la función: Edad de una persona,...
- Por voluntad de quien propone la función: Número menor que 7,...

CÁLCULO DEL DOMINIO :

- FUNCIONES POLINÓMICAS: El dominio de un polinomio es todo R : $f(x) = P(x)$ $D(f) = R$

- FUNCIONES RACIONALES: El dominio de las funciones racionales es todo R menos los puntos donde se anula el denominador:
  $f(x) = P(x) / Q(x)$ $D(f) = \{ x \in R / Q(x) \neq 0\} = R - \{ x \in R / Q(x) = 0\}$

- FUNCIONES RADICALES
  $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ Si n es impar $D(f) = R$
  Si n es par $D(f) = \{ x \in R / P(x) \geq 0\} = R - \{x \in R / P(x) < 0\}$

- FUNCIONES EXPONENCIALES
  $f(x) = a^{P(x)}$ $D(f) = R$

- FUNCIONES LOGARÍTMICAS
  $f(x) = \log_a P(x)$ $D(f) = \{ x \in R / P(x) > 0\} = R - \{x \in R / P(x) \leq 0\}$

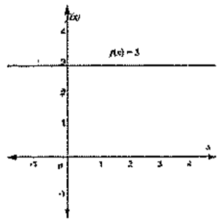
- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
  $f_1(x) = \text{sen } P(x)$, $f_2(x) = \cos P(x)$ $D(f_1) = D(f_2) = R$

El resto (tangente, secante,....) ponerlas como cociente y estudiar su dominio como una función racional (denominador diferente de cero).

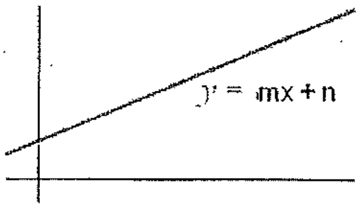
4.2 – REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES

FUNCIONES POLINÓMICAS

- Grado 0: y = k   Rectas paralelas al eje OX



- Grado 1 : y = mx + n   Rectas



La **función polinómica de primer grado** o **función lineal:** y = mx + n, se representa mediante una recta de pendiente m y que pasa por el punto (0,n). La n se llama ordenada en el origen.

Pendiente de una recta es la variación (aumento o disminución) que se produce en la y cuando la x aumenta una unidad. En una ecuación lineal, la pendiente de la recta es el coeficiente de la x cuando se despeja la y. (Si m > 0, es creciente; Si m < 0, es decreciente)

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta: $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ la pendiente se calcula :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ (Δy = Incremento de "y" entre Δx = Incremento de "x")

Si de una recta conocemos un punto $P(x_1,y_1)$ y su pendiente m, la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Para representarla se dan dos valores cualesquiera a la "x" y se calcula el valor de la "y".

Interpolación y extrapolación lineal

Si sabemos que una función es lineal (al menos aproximadamente) y que pasa por dos puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ podemos hallar su valor en cualquier otro punto $x = x_3$

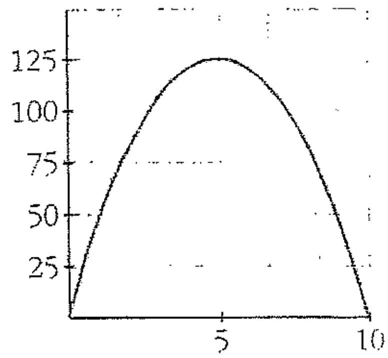
1. Hallamos la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos A y B $\Rightarrow$
   $y = mx + n$
2. Sustituimos el valor de x_3 en x y calculamos la y.

Si $x_3 \in (x_1,x_2)$ estamos interpolando.
Si $x_3 \in (-\infty,x_1) \cup (x_2,+\infty)$ estamos extrapolando.

En la extrapolación, cuanto más alejado esté x_3 del intervalo (x_1,x_2), menos fiable es el valor que obtenemos para $f(x_3)$.

• Grado 2: FUNCIONES CUADRÁTICAS Parábolas

Las **funciones polinómicas de segundo grado** o **funciones cuadráticas** : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se representan mediante parábolas.

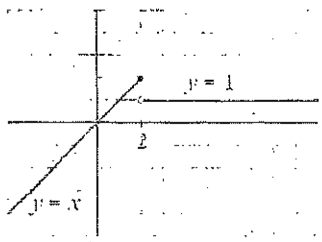


- Tienen ejes paralelos al eje Y
- Las formas de estas parábolas (que sus ramas estén hacia arriba o hacia abajo, que sean más o menos anchas,...) dependen, exclusivamente del valor de a:
  - Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba (Cónvexa)
  - Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo (Cóncava)
  - Cuando mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola
- La abscisa del vértice de la parábola es : $V_x = -\dfrac{b}{2a}$

Para representarla se calcula el vértice en la "x" y dos valores más pequeños y dos valores más grandes y se calculan las respectivas "y" de estos valores.

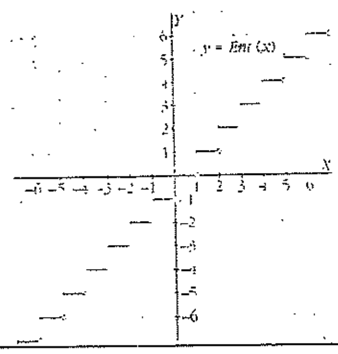
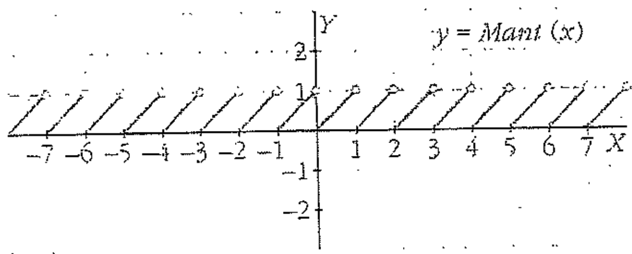
• **Grado > 2 : Lo veremos en el tema 12** **Curvas**

FUNCIONES DEFINIDAS "A TROZOS"

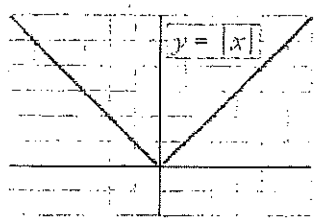


Se calcula su dominio y se hace una tabla de valores para cada trozo(los valores de la tabla en cada trozo dependerá del tipo de función).

DOS FUNCIONES INTERESANTES

• **Función parte entera :**	• **Función parte decimal :**
Se llama **parte entera** de un número x al mayor número entero menor o igual a x. A partir de eso, definimos la **función para entera de x,** Ent(x), que hace corresponder a cada número x su parte entera. 	La **parte decimal** o **mantisa** de un número x es Mant(x) = x – Ent(x). A partir de eso, definimos la **función parte decimal de x,** Mant(x) que hace corresponder a cada número x su parte decimal. 

VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN



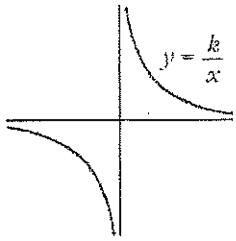
El valor absoluto de un número x coincide con x si es positivo o nulo, o con su opuesto si es negativo: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

El general el valor absoluto de una función se define así: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

Para representarla se iguala lo de dentro del valor absoluto a cero y se resuelve. Estos puntos nos dividen la función en trozos por tanto podemos tratarla como una función a trozos.

FUNCIONES RACIONALES (Sencillas, las complicadas las veremos en el Tema 12)

Se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** a aquellas cuya ecuación es y = f(x)/g(x) y sus gráficas son hipérbolas. Sus asíntotas son los ejes coordenados.

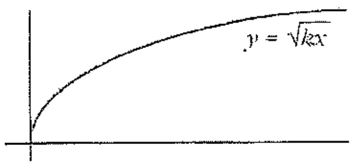


También son hipérbolas las gráficas de las funciones $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Para representarlas se hace previamente la división.

Representación :
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio
- Dibujarlas teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES RADICALES

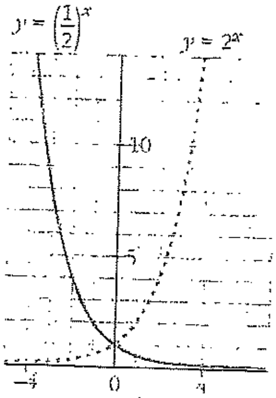
Se llaman **funciones radicales** a aquellas cuya ecuación es $y = \sqrt[n]{f(x)}$



Para representarlas:
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio. (Importante: f(x) = 0 si es de índice par determinan el dominio y se es de índice impar es el punto de inflexión y hay que tomar valores menores y mayores que él)

FUNCIONES EXPONENCIALES

Se llaman **funciones exponenciales** las que tienen la ecuación $y = a^x$, siendo la base a un número positivo distinto de 1.



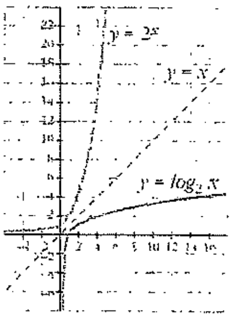
Notas:

- En matemáticas superiores la función $y = e^x$ es extraordinariamente importante. Tanto es así que cuando se habla de "la función exponencial" sin mencionar cuál es su base, se está haciendo referencia a ella.
- También son exponenciales las funciones $y = a^{kx}$, pues $a^{kx} = (a^k)^x$ es decir es una función exponencial de base a^k
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas 10^x, e^x con las que se obtienen valores de las funciones $y = 10^x$, $y = e^x$ respectivamente.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Se llaman **funciones logarítmicas** las que tienen la ecuación $y = \log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1

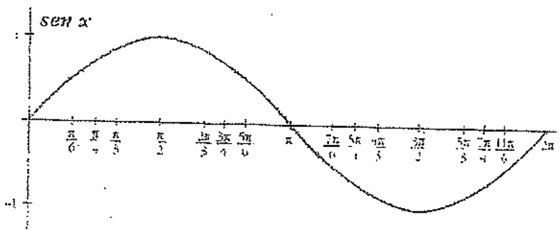
$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$, por tanto $y = \log_a x$ e $y = a^x$ son funciones inversas

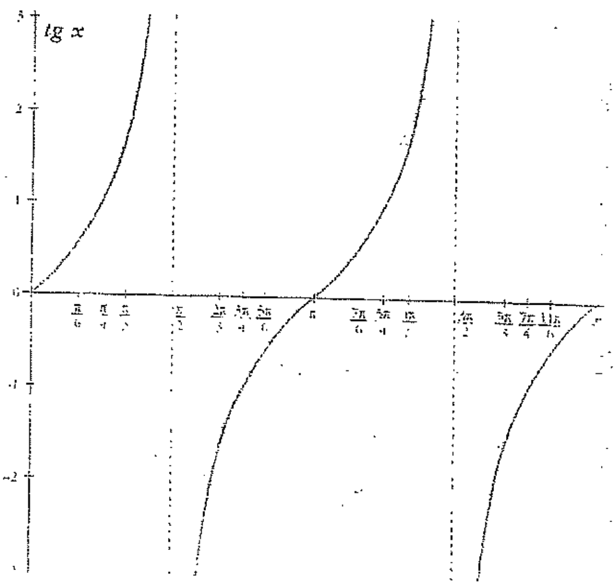


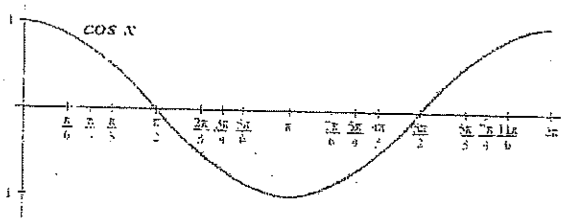
Notas:

- En matemáticas superiores la función $y = \log_e x$ es muy importante. Se le llama logaritmo neperiano y se designa por $y = \ln x$ o $y = Lx$. Es la función inversa de la exponencial de base e : $y = e^x$
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas, log y ln con las que se obtienen valores de las funciones $y = \log x$ $y = \ln x$, respectivamente.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (Repasar Tema 5)

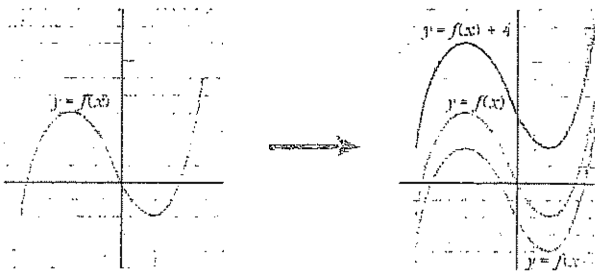




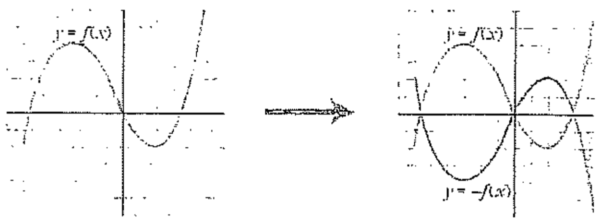


10.3 – ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

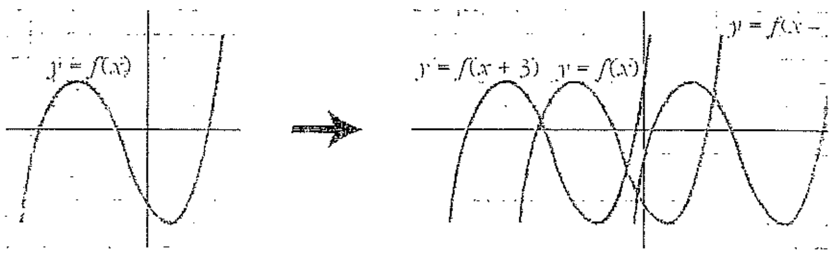
REPRESENTACIÓN DE y = f(x) ± k APARTIR DE y = f(x)
Si sumamos una constante "k" a la "y" ⇒ Subimos "k" unidades
Si restamos una constante "k" a la "y" ⇒ Bajamos "k" unidades



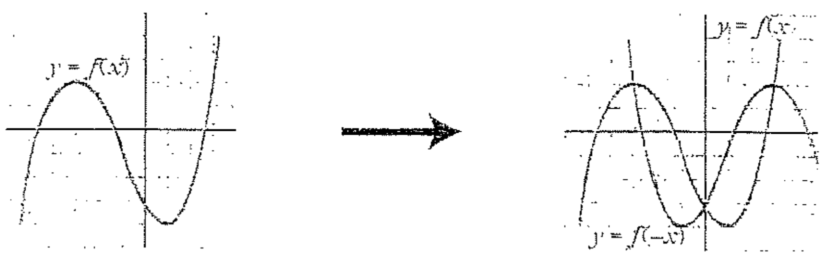
REPRESENTACIÓN DE y = - f(x) A PARTIR DE y = f(x)
Si cambiamos de signo a la "y" ⇒ Hacemos una simetría respecto del eje OX



REPRESENTACIÓN DE y = f(x ± k) A PARTIR DE y = f(x)
Si sumamos una constante "k" a la x ⇒ Nos desplazamos "k" unidades hacia la izquierda
Si restamos una constante "k" a la x ⇒ Nos desplazamos "k" unidades hacia la derecha



REPRESENTACIÓN DE y = f(-x) A PARTIR DE y = f(x)
Si cambiamos de signo a la "x" ⇒ Hacemos una simetría respecto del eje OY



10.4 – OTRAS OPERACIONES CON FUNCIONES

FUNCIÓN COMPUESTA: Dadas dos funciones, f y g, se llama **función compuesta** de f y g, y se designa $g_o f$, a la función que transforma x en g[f(x)]

$$x \xrightarrow{g\,o\,f} g[f(x)]$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\,o\,f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

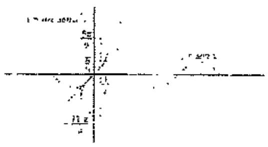
La expresión $g_o f(x)$ se lee f compuesta con g. Se nombra en primer lugar la función de la derecha porque es la primera en actuar sobre la x.
En general, la función $g[f(x)] \neq f[g(x)]$

FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA. Se llama **función inversa o recíproca** de f a otra función (se designa f^{-1}) que cumple la siguiente condición: Si f(a) = b , entonces, $f^{-1}(b) = a$
Como consecuencia $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x$
Además las gráficas de las dos funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante (y = x)

Ejemplos:	Potencias y raíces	$y = x^n$	$y = \sqrt[n]{x}$
	Exponenciales y logarítmicas	$y = a^x$	$y = \log_a x$
	Trigonométricas y arcos	y = sen x	y = arcsen x

Funciones arco

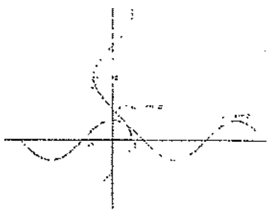
La función arcoseno : Arcsen es una función definida en [-1,1] y que toma valores en [-Π/2,Π/2] tal que : arcsen a = b ⇒ sen b = a



Es una función creciente

Verifica: sen (arcsen x) = x arcsen (sen x) = x

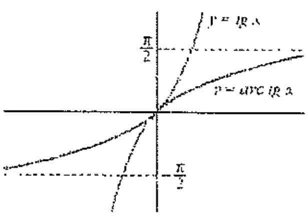
La función arcocoseno : Arccos es una función definida en [-1,1] y que toma valores en [-Π/2,Π/2] tal que : arccos a = b ⇒ cos b = a



Es una función decreciente

Verifica: cos (arccos x) = x arccos (cos x) = x

La función arcotangente : Arctag es una función definida en R y que toma valores en (-Π/2,Π/2) tal que : arctag a = b ⇒ tag b = a



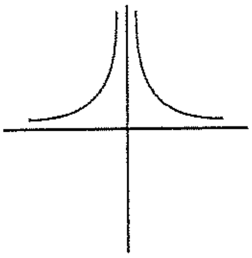
Es una función creciente

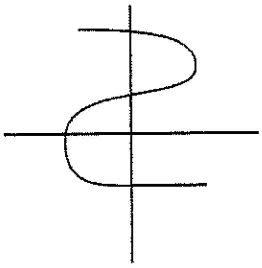
Verifica: tag (arctag x) = x arctag (tag x) = x

TEMAS 10 – LAS FUNCIONES ELEMENTALES – 1º BACH – MATE I

- **¿ Son funciones?**

EJERCICIO 1: Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:





- **Calcular el dominio dada la expresión analítica de una función**

EJERCICIO 2: Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

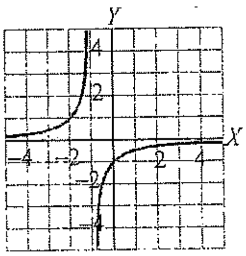
a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6}$ b) $y = \sqrt{1+x}$ c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ e) $y = \sqrt[3]{2x-4}$

f) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ g) $y = \sqrt{x^2-4}$ h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2x+3}}$ i) $y = \text{Log}\ \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

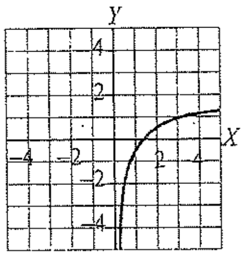
- **Calcular el dominio y el recorrido dada su representación gráfica**

EJERCICIO 3 : Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido.

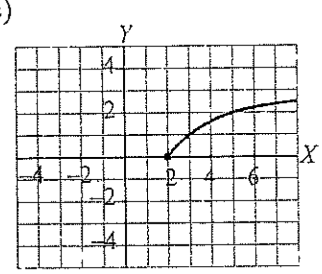
a)



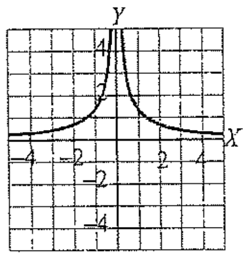
b)



c)



d)



- **Problemas de dominios**

EJERCICIO 4 : A una hoja de papel de 30 cm × 20 cm le cortamos cuatro cuadrados (uno en cada esquina) y, plegando convenientemente, formamos una caja cuyo volumen es:

$$V = x.(20-2x).(30-2x)$$

¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

EJERCICIO 5 : Las tarifas de una empresa de transportes son:

· Si la carga pesa menos de 10 toneladas, 40 euros por tonelada.

· Si la carga pesa entre 10 y 30 toneladas, 30 euros por tonelada (la carga máxima que admiten es de 30 toneladas).

Si consideramos la función que nos da el precio según la carga, ¿cuál será su dominio de definición?

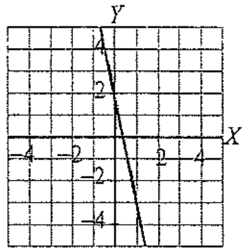
- **Representación gráfica de funciones lineales**

EJERCICIO 6 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades:

a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ b) $2x + y - 1 = 0$ c) $y = \frac{2x-3}{4}$

- **Hallar la ecuación de una recta**

EJERCICIO 7 : Escribe la ecuación de la recta cuya gráfica es la siguiente:



EJERCICIO 8 : Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, –4) y (–1, 3).

EJERCICIO 9 : Halla la ecuación de la recta que pasa por (2,-1) y cuya pendiente es $\frac{2}{3}$

EJERCICIO 10 : Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas:

I) $2x + y = 0$ II) $x - 2y + 1 = 0$ III) $y = 2$

- **Problemas de interpolación lineal**

EJERCICIO 11 : Si consumimos 60 m^3 de gas tendremos que pagar un recibo de 35,96 euros, y por un consumo de 80 m^3 tendríamos que pagar 43,56 euros. ¿Cuál sería el precio del recibo si consumiéramos 70 m^3 de gas?

EJERCICIO 12 : Al apuntarnos en un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades. Si estamos 6 meses, nos gastaremos en total 246 euros, y si estamos 15 meses, nos costará 570 euros. ¿Cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año?

EJERCICIO 13 : Sabiendo que 15° C (grados centígrados) equivalen a 59° F (grados Fahrenheit), y que 30° C son 86° F, averigua cuántos grados centígrados son 70° F.

- **Función cuadrática**

EJERCICIO 14 : Halla el vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$ b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

EJERCICIO 15 : Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -x^2 + 4x$

EJERCICIO 16 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

a) $y = x^2 - 3x$ b) $y = -x^2 + 4x - 1$ c) $y = (x - 1)^2 + 3$

- **Problemas de interpolación cuadrática**

EJERCICIO 17 : De una función se sabe que f(1) = 0, f(2) = 3 y f(-1) = 6. Halla la función de segundo grado y utilízala para estimar el valor de f(0).

EJERCICIO 18 : Los gastos de producción y los ingresos por ventas (ambos expresados en millones de euros) de cierta empresa durante los tres últimos años han sido los siguientes:

GASTOS	3	4	6
INGRESOS	10	12	20

a) Halla el polinomio interpolador de segundo grado que exprese los ingresos en función de los gastos.
b) ¿Qué ingresos cabría esperar este año si los gastos de producción fuesen de 5 millones de euros?

- **Función radical**

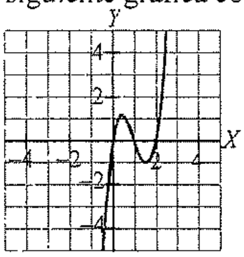
EJERCICIO 19 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:
a) $y = \sqrt{x+1}$ b) $y = -\sqrt{x-2}$ c) $y = \sqrt{2-x}$ d) $y = \sqrt{x^2-4}$

- **Función de proporcionalidad inversa**

EJERCICIO 20 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:
a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{3}{x-4} + 2$ c) $y = \dfrac{2x+3}{x-3}$ d) $y = \dfrac{3x-3}{2-x}$

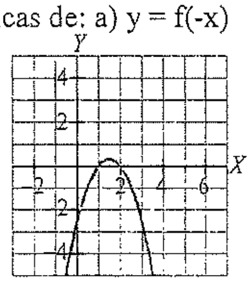
- **Transformaciones de funciones**

EJERCICIO 21 : La siguiente gráfica corresponde a la función y = f(x) :

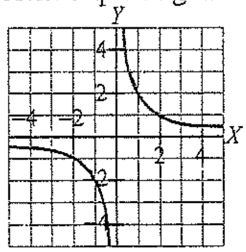


A partir de ella, representa: a) y = f(x) + 3 b) y = f(x - 2)

EJERCICIO 22 : A partir de la gráfica de y = f(x) :
construye las gráficas de: a) y = f(-x) b) y = 1+ f(x)

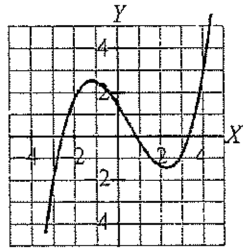


EJERCICIO 23 : Sabiendo que la gráfica de $y = f(x)$ es la siguiente:



construye, a partir de ella, las gráficas de: a) $y = f(x + 1)$ b) $y = f(x) + 1$

EJERCICIO 24 : Sabiendo que la gráfica de f(x) es la de la izquierda representa la gráfica de $y = | f(x) |$



- **Funciones a trozos**

EJERCICIO 25 : Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f(3)$, siendo: $f(x)= \begin{cases} 4x^2+1 & \text{si } x \le -1 \\ x-1 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

EJERCICIO 26 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades:

a) $y = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } x \le 1 \\ -x+\dfrac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- **Funciones con valor absoluto**

EJERCICIO 27 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = | 2x - 4 |$ b) $y = \left|\dfrac{x-1}{2}\right|$ c) $y = | x^2 + 2x | + x - 2$

- **Repaso**

EJERCICIO 28 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

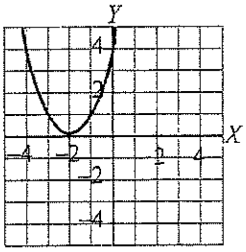
a) $y = | 4x +2 |$ b) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \left|\dfrac{x-1}{3}\right| + 4$ d) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \le 0 \\ x^2-3x+4 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x < 7 \end{cases}$ f) $y = \dfrac{3-x}{x+1}$

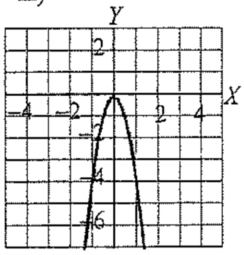
EJERCICIO 29 : Asocia a cada gráfica su ecuación:

a) $y = -3x + 5$ b) $y = (x+2)^2$ c) $y = -\frac{5}{3}x - 1$ d) $y = -4x^2$

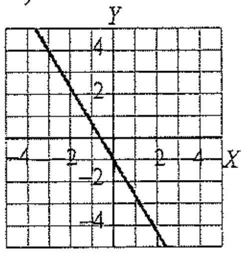
I)



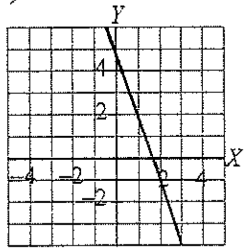
II)



III)



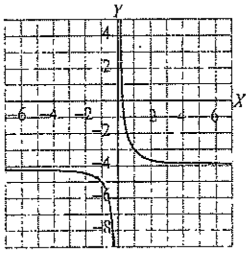
IV)



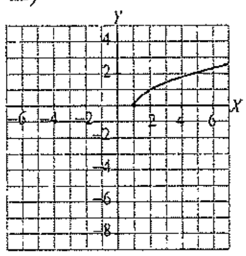
EJERCICIO 30 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

a) $y = \frac{1}{x+4}$ b) $y = \sqrt{x-1}$ c) $y = \frac{1}{x} - 4$ d) $y = \sqrt{2-x}$

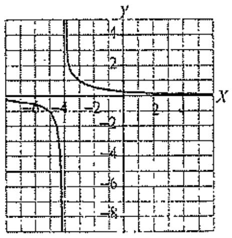
I)



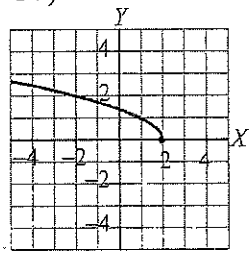
II)



III)



IV)



EJERCICIO 31 : Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos. Escribe la función que nos da el peso total del cántaro según la cantidad de agua, en litros, que contiene.

EJERCICIO 32 : El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Obtén la función que nos dé el área del rectángulo en función de la longitud de la base.

EJERCICIO 33 : El precio por establecimiento de llamada en cierta tarifa telefónica es de 0,12 euros. Si hablamos durante 5 minutos, la llamada nos cuesta 0,87 euros en total. Halla la función que nos da el precio total de la llamada según los minutos que estemos hablando.

EJERCICIO 34 : Un muelle mide 7 cm cuando colgamos de él un peso de 10 gramos, y mide 13 cm cuando colgamos de él 80 gramos.

a) Estima, mediante interpolación lineal, cuánto medirá si colgamos de él 50 gramos.

b) Escribe la ecuación de la recta que nos da la longitud, y, en función del peso que colgamos, x.

c) Representa gráficamente la función anterior.

EJERCICIO 35 : Subiendo una montaña, medimos la temperatura a 360 m de altura, y esta era de 8° C. Cuando estábamos a 720 m de altura, la temperatura era de 6° C.

a) Estima, mediante interpolación lineal, la temperatura que había a 500 m de altura.

b) Halla la expresión analítica de la recta que nos da la temperatura en función de la altura, y represéntala gráficamente.

- **Composición de funciones**

EJERCICIO 36 : Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:
a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

EJERCICIO 37 : Considera las funciones f y g definidas por: $f(x) = \frac{x+1}{3}$, $g(x) = x^2-1$
Calcula: a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

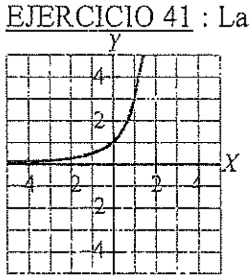
EJERCICIO 38 : Sabiendo que $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$, halla:
a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ g)(x)$

EJERCICIO 39 : Con las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ hemos obtenido, por composición, estas otras: $p(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $q(x) = \frac{1}{x^2}+1$. Explica cómo, a partir de f y g, se pueden obtener p y q.

EJERCICIO 40 : Dadas las funciones: $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Explica como, a partir de ellas, se pueden obtener por composición estas otras: $p(x) = \frac{x+1}{2}$ $q(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2}+1}$

- **Inversa de una función**

EJERCICIO 41 : La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:



a) Calcula $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(1)$
b) Representa en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de f(x)

EJERCICIO 42 : Halla la función inversa de estas funciones y comprobarlo analíticamente:
a) $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ b) $y = 4x^3 - 1$ c) $y = 3 - \sqrt{2x^2-1}$ d) $y = \frac{x-5}{2x+1}$

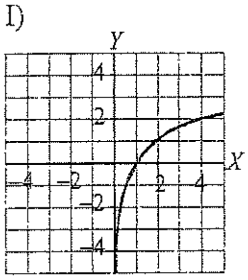
- **Funciones exponenciales y logarítmicas**

EJERCICIO 43 : Representa la gráfica de las siguientes funciones y estudia sus propiedades
a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ b) $y = 1 + \log_2 x$ c) $y = \log_{1/3} x$ d) $y = 2^{1+x}$
e) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ f) $y = \log(x+1)$ g) $y = e^x$ h) $y = \text{Ln } x$

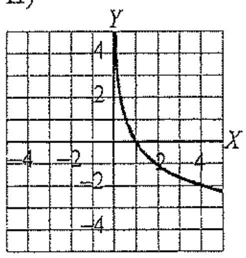
EJERCICIO 44 : Asocia cada una de las siguientes gráficas con su ecuación:

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $y = \log_2 x$ d) $y = \log_{1/2} x$

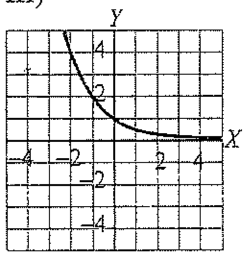
I)



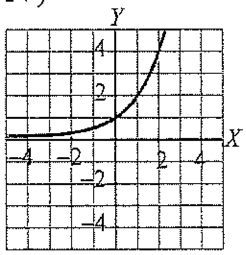
II)



III)



IV)



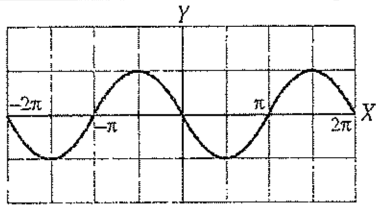
EJERCICIO 45 : Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $y = 1 + k.\, e^{at}$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos en miles.

a) Calcula k y a sabiendo que $y(0) = 1{,}2$ y que $y(10) = 1 + 0{,}2e \approx 1{,}54$

b) Representa la función obtenida con los valores de k y a que has hallado.

- **Funciones trigonométricas**

EJERCICIO 46 : Considera la siguiente gráfica:

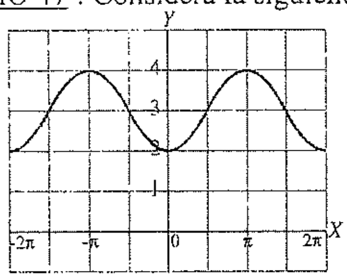


a) Di cuál de estas expresiones analíticas le corresponde:

$y = \cos(x + \pi)$ $y = \text{sen}(x + \pi)$ $y = \cos 2x$ $y = \text{sen}\, 2x$

b) Di cuál es su dominio de definición, cuál es su periodo y qué valores mínimo y máximo alcanza.

EJERCICIO 47 : Considera la siguiente gráfica y responde:



a) ¿Cuál de estas es su expresión analítica?

$y = 3 - \text{sen}\, x$ $y = 3 - \cos x$

$y = 3 + \cos x$ $y = 3 + \text{sen}\, x$

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

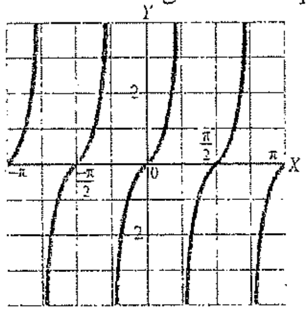
c) ¿Es una función continua?

d) ¿Es periódica? ¿Cuál es su periodo?

e) ¿Qué valores mínimo y máximo alcanza?

EJERCICIO 48 :

a) Di cuál de las siguientes expresiones se corresponde con la gráfica:



$y = 2 \cos x$
$y = 2\, tg\, x$
$y = tg\, 2x$
$y = 2 + \cos x$
$y = \cos 2x$

b) Para la función anterior, di cuál es su dominio, estudia su continuidad e indica cuál es su periodo.

Unidad 4

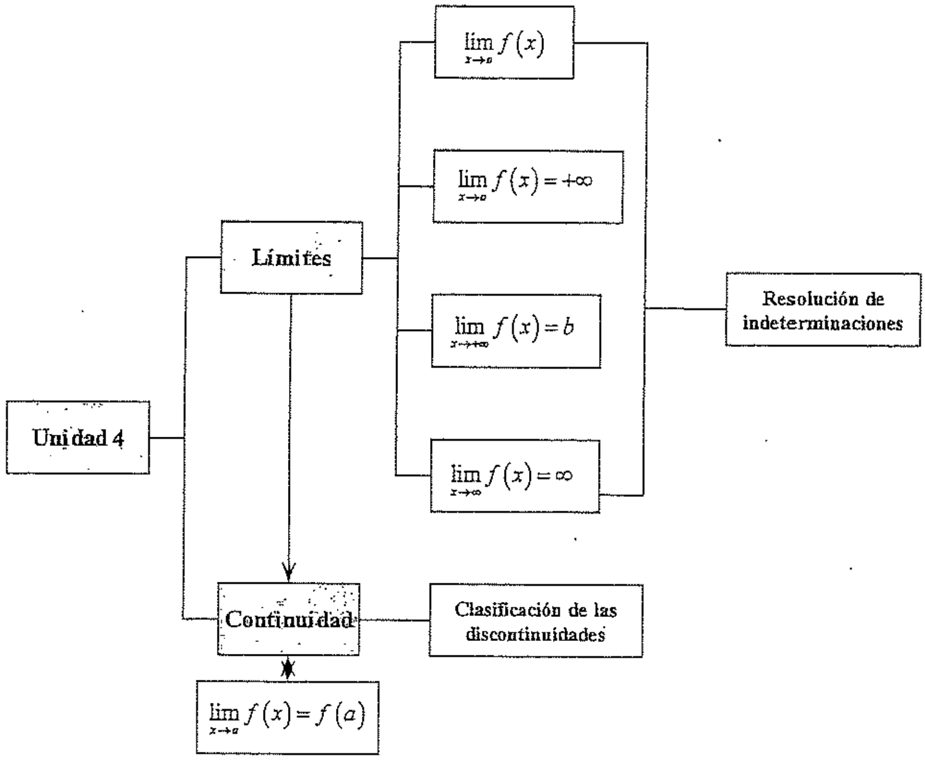
LÍMITES Y CONTINUIDAD

CONTENIDOS

Objetivos fundamentales

1. Conocer el concepto de límite de una función en un punto y saber calcular límites sencillos mediante una tabla de valores.
2. Saber calcular límites de una función, resolviendo las correspondientes indeterminaciones cuando éstas se presenten.
3. Determinar las asíntotas de una función.
4. Saber estudiar la continuidad de una función, tanto en un punto como en un intervalo: a partir de su gráfica y analíticamente.
5. Clasificar las discontinuidades de una función.
6. Relacionar la continuidad, en un intervalo cerrado, con sus extremos absolutos.

1.- MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



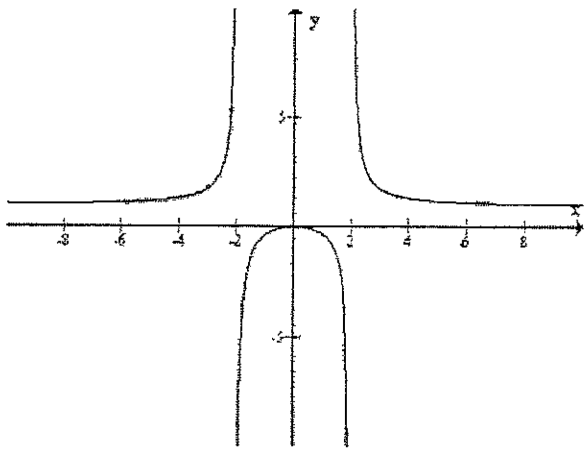
2.- CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

EJERCICIO:

1. Observando la gráfica de la función $y=f(x)$, calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0+} f(x)$ e) $\lim_{x\to -2+} f(x)$ g) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2-} f(x)$ d) $\lim_{x\to 0-} f(x)$ f) $\lim_{x\to -2-} f(x)$ h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



Definición intuitiva: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ es L, y escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sii para valores de x cada vez más próximos a a (***distintos de a***), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximas a L.

EJERCICIO:

2. *Dándole a x valores próximos a 1, tanto mayores como menores que él, calcula hacia que valor tienden las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = 2x + 4$　　　d) $f(x) = \frac{2}{x}$

   b) $f(x) = x^2$　　　e) $f(x) = x^3 - 1$

   c) $f(x) = (x+1)^2 - 3$　　　f) $f(x) = \frac{x+2}{3}$

3.- LÍMITES LATERALES: CARACTERIZACIÓN

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo menor que a. Se denota por: $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ó $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

El límite por la derecha es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo mayor que a. Se denota por: $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ó $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Esto da lugar a la siguiente **caracterización**:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x), \ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \end{cases}$$

En cuyo caso $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

EJERCICIO:

3. *Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:*

   a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

4.- LÍMITES Y OPERACIONES CON FUNCIONES: ÁLGEBRA DE LÍMITES

Se tienen las siguientes **propiedades** de los límites:

1) $\lim_{x \to a} k = k$

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$

EJERCICIO:

4. *Sabiendo que las funciones* $f(x)$ y $g(x)$ *tienen por límite* -2 y 5, *respectivamente, cuando* x *tiende a 3, calcula el valor de los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left[5f(x)-g(x)\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+2g(x)\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f(x)}{7g(x)}$

5.- LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

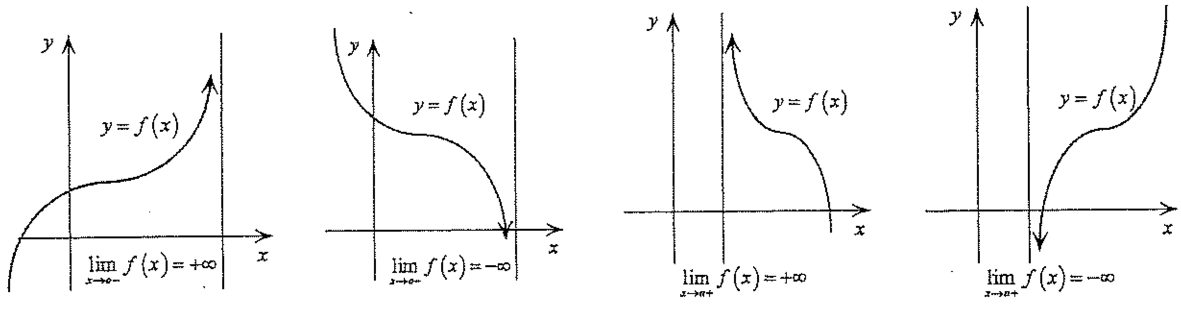
Decir que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ significa que cuando x tiende a a, con $x<a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real k:

Análogamente, decir que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ significa que cuando x tiende a a, con $x<a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños:

Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites

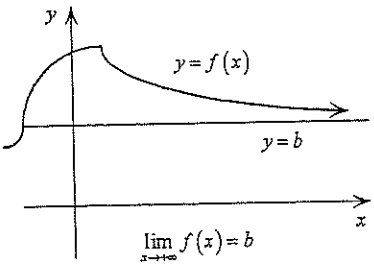
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\pm\infty$ $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\pm\infty$

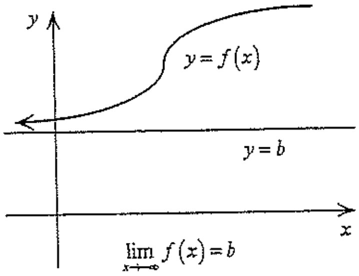


6.- LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=b$ significa que cuando x se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores muy próximos un número fijo b:

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ ó $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$





7.- LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUOAS

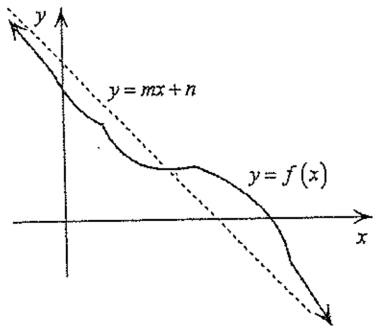
También puede suceder que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, lo que significa que x y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$$

para todo $x > p$, siendo k y p números arbitrariamente grandes.

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$

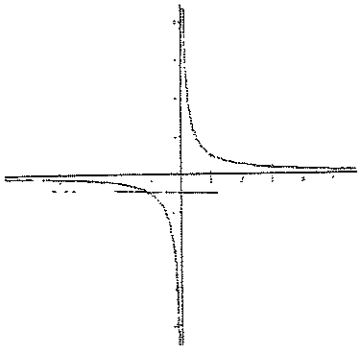
en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right)$.



8.- ALGUNOS LÍMITES A TENER EN CUENTA

Antes de meternos de lleno en la resolución de indeterminaciones, vamos a estudiar algunos límites muy sencillos, pero que aparecen mucho y que por tanto es necesario tenerlos siempre presentes:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$

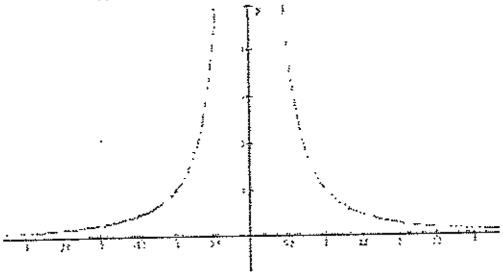


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

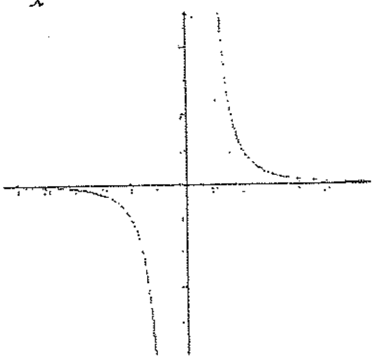


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

(3) $h(x)=\dfrac{1}{x^3}$

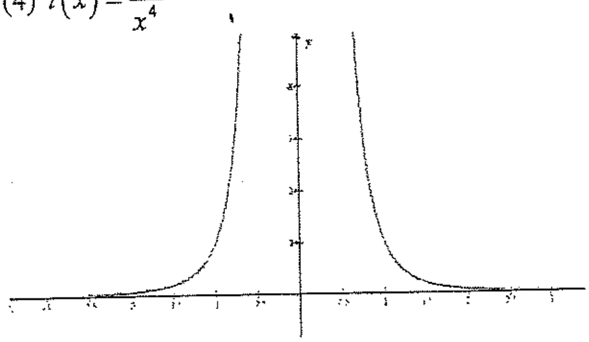


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}$$

(4) $i(x)=\dfrac{1}{x^4}$



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^4}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

(5) En general:

Para n impar:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^n}=-\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}$$

Para n par:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^n}=+\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

Un par de consideraciones a tener en cuenta al calcular límites:

a) Si $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\ \infty$$

y el resultado sólo depende del monomio a_nx^n.

b) Para límites en el infinito de funciones racionales se tiene la siguiente regla práctica, donde $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ y $P(x)=b_mx^m+...+b_1x+b_0$.:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si}\quad grado(P)>grado(Q)\\ \frac{a_n}{b_n} & \text{si}\quad grado(P)=grado(Q)\\ 0 & \text{si}\quad grado(P)<grado(Q)\end{cases}$$

9.- RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites son una indeterminación.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{k}{0}$ CON $k\neq0$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to a+}f(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x\to a}f(x)$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{0}{0}$

a) **Para funciones racionales**

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\infty-\infty$

a) La función es diferencia de dos funciones racionales

Se efectúa dicha operación.

b) La función es diferencia de funciones irracionales

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $0\cdot\infty$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO 1^{∞}

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ y sabemos que

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

EJERCICIOS:

5. *Calcula los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones que aparezcan:*

a) Indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$ con $k\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{-8}{5x^4}$$

b) Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} \qquad\qquad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

c) Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-1}$$

d) Indeterminación del tipo $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x-2}{x+1}-2x\right) \qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

e) Indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to 4}\left(\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-4}}\right) \qquad \lim_{x\to 3}\left[\left(x^2-9\right)\cdot\frac{1}{x-3}\right]$$

f) Indeterminación del tipo 1^{∞}

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^3}{-4x^3-7}\right)^{2x}$$

6. *Calcula el valor de los siguientes límites:*

1) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{5x^2}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{2x^2-1}$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2}{2x^4+3x^3+1}$ 6) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{4x-5}$ 8) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$ 9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$

10) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 11) $\lim_{x\to-5}\frac{2x^2+4x-30}{x+5}$ 12) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$

13) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-3}$ 14) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-5}{x+3x^2}$ 15) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

16) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ 17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{5-\sqrt{x+25}}$

18) $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2-9}$ 19) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x^2+7x+1}$

20) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x-2}\right)$ 21) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)$

22) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+5}$ 23) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{3x}$

24) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$ 25) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1+3x^2}{x^2}}$

26) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+5x}{5x-3}\right)^{x^2}$ 27) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{x}$

10.- MÁS SOBRE ASÍNTOTAS

10.1. Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función *puede tener infinitas asíntotas verticales*.

(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores x que anulan al denominador.

(3) La gráfica ele <u>*la función no puede cortar a las asíntotas verticales*</u>.

10.2. Asíntotas horizontales

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=k \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene <u>*como máximo dos asíntotas horizontales*</u>.

(2) La gráfica de <u>*la función puede cortar a las asíntotas horizontales*</u>.

(3) Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota horizontal.

(4) Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta y = 1) será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).

(5) Si en una fruición racional el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.

(6) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador hay asíntota horizontal.

10.3. Asíntotas oblicuas

La recta $y=mx+n,\ m\neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$$

en cuyo caso $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener <u>*como máximo dos asíntotas oblicuas*</u>.

(2) <u>*Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente*</u>.

(3) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.

(4) La gráfica de <u>*la función puede cortar a las asíntotas oblicuas*</u> en uno o varios puntos.

<u>EJERCICIOS:</u>

7. *Averigua las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones, cuando existan:*

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}-64$ d) $f(x)=\dfrac{3}{x^3}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-7}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

c) $f\left(x\right)=\dfrac{6x+2}{4x-2}$

f) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$

8. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.

1) $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x-1}$

2) $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^2}{x+1}$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{9-x^2}{x-3}$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{2x}$

5) $f\left(x\right)=\dfrac{\left(3-x\right)^2}{2x+1}$

6) $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

7) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

8) $f\left(x\right)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$

9) $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+3\right)^2}{\left(x+1\right)^2}$

10) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x-1}$

11) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x}{2x-1}$

12) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$

13) $f\left(x\right)=\dfrac{x\left(x^2-x\right)}{x^2}$

14) $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

15) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2}{x+2}$

16) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{9-x^2}$

17) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$

18) $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{2x-5}$

9. Dadas las siguientes funciones calcula sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, si existen:

a) $f(x)=x^2-4x+3$

b) $j(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

c) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

d) $k(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4x}$

e) $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

11.- CONTINUIDAD

11.1. Concepto de función continua

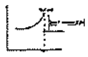
Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en el punto $x=a\in Dom\left(f\right)$ cuando

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=f\left(a\right) \qquad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

No tiene sentido decir que la función $y = \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.

- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - 
  - Dichos valores coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una <u>función</u> es <u>continua</u> cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición. .

Si una <u>función</u> no es continua en un punto se dice que es <u>discontinua</u> en dicho punto.
Una <u>función</u> es <u>continua por la derecha en un punto</u> si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Una <u>función</u> es <u>continua por la izquierda en un punto</u> si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

<u>Caracterización:</u>
Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Una <u>función</u> es <u>continua en</u> $[a, b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a, b)
(2) Sea continua por la derecha en a
(3) Sea continua por la izquierda en b

11.2. Continuidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, son continuas en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas en su dominio.
- La **función exponencial**, $y = e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y = \log f(x)$, es continua en todo punto x, tal que $f(x) > 0$ y $f(x)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, son siempre continuas. La función $y = \operatorname{tg} x$ es continua en su dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan y sean iguales.

EJERCICIOS:

10. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

11. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+t & \text{si} \quad x\leq -2 \\ x^2-2t & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ 4x-8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

determina el valor de t para que la función sea continua en todo su dominio.

12. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si} \quad x\neq 5 \\ 0 & \text{si} \quad x=5 \end{cases}$*, estudiar su continuidad.*

13. Determinar a y b *para que la siguiente función sea continua:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

14. Halla los valores de los parámetros que aparecen para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} kx+5 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^3+2hx^2-3x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

15. Hallar el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x)=\begin{cases} kx+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ k^2x^2+2x-k & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ *b)* $f(x)=\begin{cases} -k^2-x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 1+k(x-1) & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

16. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 4-ax^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ *d)* $f(x)=\begin{cases} kx^2-4 & \text{si} \quad x\leq 3 \\ x+k & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si} \quad x\neq -1 \\ h^2+2h & \text{si} \quad x=-1 \end{cases}$ *e)* $f(x)=\begin{cases} 6-\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x<2 \\ x^2+kx & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 2^{kx+5} & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 2^{x+k} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

17. *Pon un ejemplo de una función donde falle sólo una de las tres condiciones necesarias para que sea continua en un punto.*

18. *Dada la función:* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+b & x\leq -1 \\ 3x^2+4 & -1<x<1 \\ -x^3+8 & x\geq 1 \end{cases}$

calcula el valor de b para que $f(x)$ *sea continua en* $x=-1$. *¿Es continua en* $x=1$*?*

19. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16} & \text{si} \quad x\neq 2\,,\ x\neq 4 \\ k+1 & \text{si} \quad x=2 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x=4 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} |2x+1| & x\leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & 0<x<2 \\ \dfrac{x^5-11x-10}{x+3} & x\geq 2 \end{cases}$

20. *Calcula a y b para que sea continua la siguiente función:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x\leq -1 \\ b & -1<x<3 \\ 2x+4 & x\geq 3 \end{cases}$$

21. *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=|1-x^2|$.

22. *Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que*

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+3} & \text{si} \quad 0\le x\le 30\\[2mm] \dfrac{1,125}{(x-5)(x-15)} & \text{si} \quad x>30\end{cases}$$

a) Justificar que la función $T(x)$ es continua.

b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista, menor será el tiempo empleado en realizar la prueba?

23. *La calificación obtenida por un estudiante en un examen depende de las horas x de preparación a través de la función*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{5} & \text{si} \quad 0\le x\le 15\\[2mm] \dfrac{2x}{0,2x+3} & \text{si} \quad x>15\end{cases}$$

a) ¿Tiene sentido afirmar que a mayor tiempo de preparación corresponde mayor calificación?

b) ¿Es dicha función continua?

24. *Dada la función*

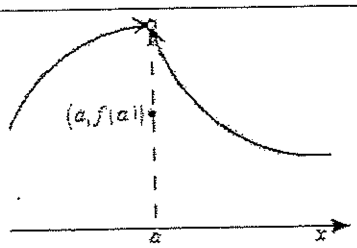
$$f(x)\begin{cases}2x+a & \text{si} \quad x\le -1\\ -x^2+2 & \text{si} \quad -1<x\le 1\\ \ln x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Calcular a para que la función f sea continua en $x=-1$.

b) Representa la función para $a=3$.

11.3. Clasificación de las discontinuidades

1) Si $\exists \lim_{x\to a} f(x)=L$ y $L\ne f(a)$ entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable en el punto $x=a$.**



El valor que deberíamos darle a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en a, y es:

$$f(a):=\lim_{x\to a} f(x)$$

EJERCICIO:

25. *Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:*

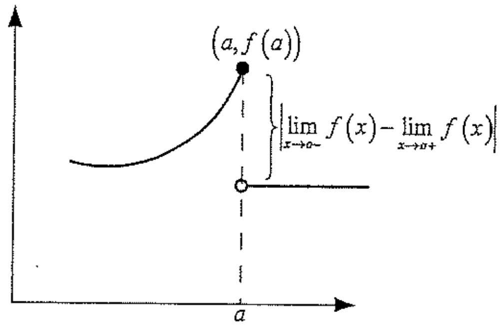
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 3 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

2) Si $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)=L$, $\exists \lim\limits_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$ se dice que f presenta una **discontinuidad de salto o de primera especie en** a.

En este caso, el valor

$$\left|\lim_{x\to a-} f(x)-\lim_{x\to a+} f(x)\right|$$

se llama salto de la función en a, y puede ser finito o infinito.

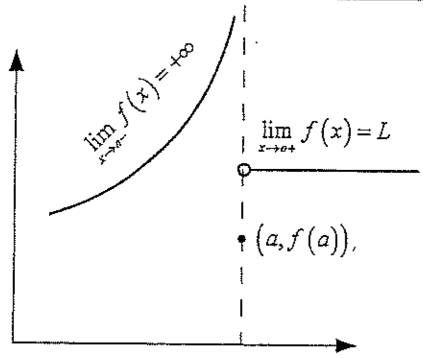


EJERCICIO:

26. *Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:*

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x\leq 1\\ x-1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

3) Las discontinuidades que no sean ni evitables ni de primera especie se denominan **discontinuidades de segunda especie**, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.



EJERCICIOS:

27. *Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\leq 0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

28. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, clasificando sus discontinuidades:

a) $f(x)=\begin{cases} |x-3| & \text{si} \quad x\neq -3 \\ 2 & \text{si} \quad x=-3 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 3x+2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x<4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si} \quad x\geq 4 \end{cases}$

11.4. Teoremas importantes

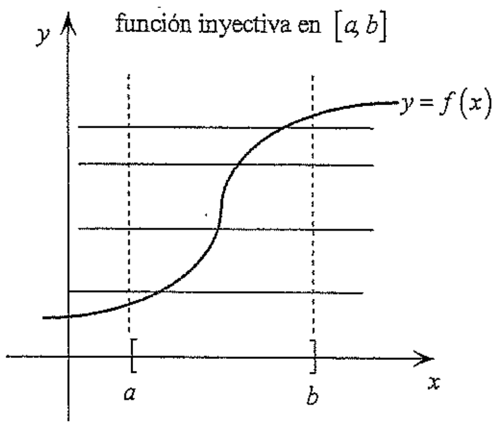
Un par de $\boxed{\text{resultados}}$ que es importante conocer y memorizar:

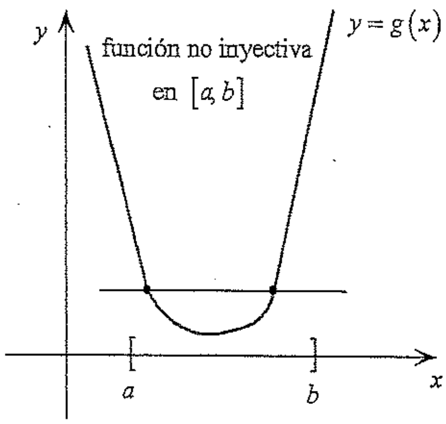
- **Teorema de Weierstrass**: Toda función continua en un intervalo de la forma $[a,b]$ tiene máximo y mínimo absolutos.

  Este teorema es de existencia, es decir, ***nos dice que hay*** máximo y mínimo absolutos, ***pero no cuáles son***. Para determinarlos, nosotros representaremos la función.

- Bajo la hipótesis adicional de que la función sea inyectiva, el máximo y el mínimo (absolutos) se alcanzan en los extremos del intervalo.

  Lo único que necesitamos conocer sobre las funciones inyectivas es la siguiente **interpretación geométrica**:
  Una función es inyectiva, en un intervalo, si cualquier recta paralela al eje OX sólo corta a la gráfica de la función en un único punto (en dicho punto).

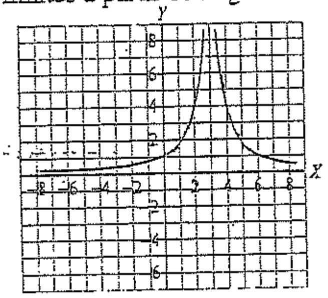




TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

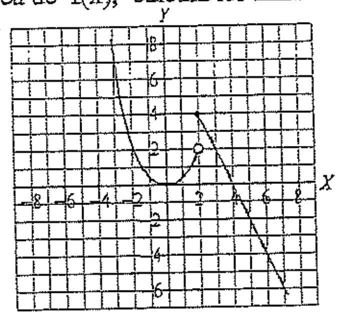
Cálculo de límites sobre la gráfica

EJERCICIO 1 : Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de f(x):



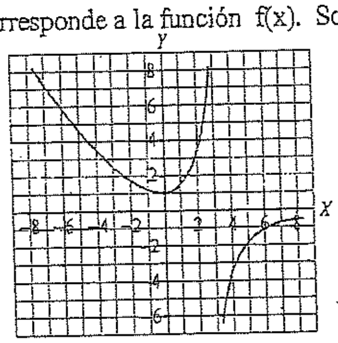
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

EJERCICIO 2 : Dada la siguiente gráfica de f(x), calcula los límites que se indican:



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

EJERCICIO 3 : La siguiente gráfica corresponde a la función f(x). Sobre ella, calcula los límites:



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Cálculo de límites inmediatos

EJERCICIO 4 : Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{4}{x^2+2x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{x^2-9}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x$ d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{6-3x}$ f) $\lim\limits_{x\to1} \log x$ g) $\lim\limits_{x\to2} \left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to-2} 3^{x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ j) $\lim\limits_{x\to-2} (3-x)^2$ k) $\lim\limits_{x\to-8} \left(1+\sqrt{-2x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

Cálculo de límites e interpretación geométrica

EJERCICIO 5 : Calcula los siguientes límites e interpreta geométricamente el resultado.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{(2-x)^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-x^3}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{5+3x}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{5+3x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(1-x)^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-x^3}{x^2}$ 7) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2-x}$ 8) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{4-x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to3} \frac{-1}{2x-6}$ 11) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x^2+1}$ 12) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x+5}{x+3}$

13) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ 14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2x+3x^3\right)$ 15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2-1}$ 16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}-x^2\right)$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^2}$ 18) $\lim\limits_{x\to2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ 19) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-4}$ 20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^4-3x}{x^4+1}$

EJERCICIO 6 : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7}$ d) $\lim\limits_{x\to4} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{x-4}}$

e) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}$ g) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ h) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+x^2-4x-4}$

i) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ j) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x+1}{x-2}$ k) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+4}{(x+1)^2}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-3x+7}-2x$

EJERCICIO 7 : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to4} \frac{3x^2-24x+48}{x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$ d) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$

e) $\lim\limits_{x\to2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ f) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x+3}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x^3-1}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+3}\right)^{2x}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

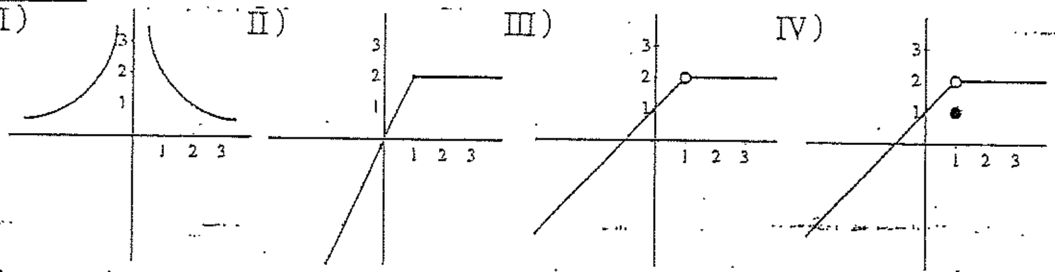
m) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ n) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}$

EJERCICIO 8 : Calcula el límite cuando $x\to3$ de cada una de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos en cada caso:

a) $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x$ b) $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$ c) $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

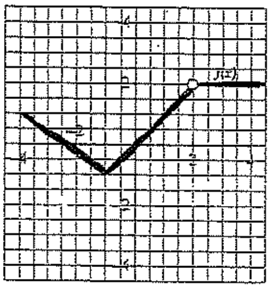
Estudio de la continuidad a partir de una gráfica

EJERCICIO 9 : Dadas las funciones:



a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

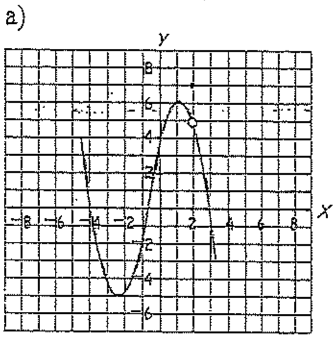
EJERCICIO 10 : Dada la gráfica:



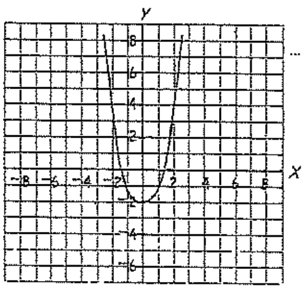
a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla $f(-1), f(0), f(2)$ y $f(3)$.

EJERCICIO 11 : ¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$?

a)

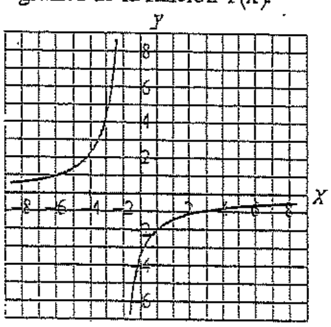


b)



Si alguna de ellas no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

EJERCICIO 12 : Esta es la gráfica de la función $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = -2$?

b) ¿Y en $x = 0$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica la causa de la discontinuidad.

Estudio de la continuidad a partir de su expresión analítica

EJERCICIO 13 : Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}}$ b) $y=\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}$ c) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

EJERCICIO 14 : Estudia la continuidad de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{3} & \text{si } x\le 4\\ x^2-15 & \text{si } x>4\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{si } 0<x\le 1\\ 3x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ \dfrac{3x-1}{2} & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{si } x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{si } x\ne 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ 1-x^2 & \text{si } x\ne 0\end{cases}$

EJERCICIO 15 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } -6\le x<-2\\ 1 & \text{si } -2<x\le 1\\ 2x+1 & \text{si } 1<x<3\\ -2x+13 & \text{si } 3\le x<5\\ 3 & \text{si } x>5\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ x^2+x & \text{si } 0\le x<1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{3}{x+3} & \text{si } x>0\end{cases}$

EJERCICIO 16 : Hallar $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ siendo

$f(x)=\begin{cases}3-x & \text{si } x\ge 2\\ 0 & \text{si } x<2\end{cases}$

a) ¿ Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

b) Estudia su continuidad en el punto $x=2$

EJERCICIO 17 : Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\ne 1\\ k & \text{si } x=1\end{cases}$$

EJERCICIO 18 : Halla el valor de m para que $f(x)=\begin{cases}3x^2+mx-1 & \text{si } x\le 1\\ 2x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$ sea continua en todo R.

Asíntotas y ramas infinitas

EJERCICIO 19 :Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+2)^2}$ d) $f(x)=\dfrac{-x^3+x}{2}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+3}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ g) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{2x+1}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

i) $f(x)=\dfrac{x^4+2x}{x^2+1}$ j) $f(x)=\dfrac{1-3x}{2-x}$ k) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^3}$ l) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

m) $f(x)=\dfrac{4x^2-3}{x}$ n) $f(x)=x^2-x$

LÍMITES – Cálculo y representación

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{x^2+2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x+4)^2$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{3x-x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} {\frac{3x^3}{x^2}}^{2}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^4+2x}-x$
11. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}+x$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} {\frac{2x+3}{4x+4}}^{-x}$
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} {\frac{4x+3}{4x+4}}^{2x}$
15. $\lim\limits_{x\to 2} {\frac{x+2}{x+3}}^{\frac{1}{x-2}}$
16. $\lim\limits_{x\to 2} {\frac{2x}{x+2}}^{\frac{3}{2-x}}$

ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS – Cálculo y representación

1. $y = x^3 - 2x - 1$
2. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$
3. $y = \frac{x+1}{x^2+x}$
4. $y = \frac{2x^2+1}{x+1}$
5. $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

CÁLCULO DE LÍMITES

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-6x+1\right)=-2$	2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-2x+1\right)=\infty$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+x\right)=+\infty$
4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}=\dfrac{a-1}{2a}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}=\pm\infty$	6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)=0$
7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{-1}{2}$	8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}=0$	9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}=\dfrac{-1}{2}$
10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2}=\pm\infty$	11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}=2$	12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}=\infty$
13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2}{x^5+1}=0$	14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}=+\infty$	15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\dfrac{\sqrt{a}}{2a}$
16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}=0$	17) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)=-2$	18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}=0$
19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2}$	20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$ $sol:1$	21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ $sol:-1$
22) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)=-2$	24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\sqrt{2}$
25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right)=1$	26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+1}\left(\sqrt{2x^5-2x}-\sqrt{2x^5+3x}\right)\right)=\dfrac{-5\sqrt{2}}{4}$	
27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right)\right)=\infty$	28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-6x}-(x-3)}{x+3-\sqrt{x^2+6x}}=-1$	29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}=-2$
30) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}=\pm\infty$	31) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}=2$	32) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}=\dfrac{9}{17}$
33) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}=\dfrac{5}{4}$	34) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}=2$	35) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)=\dfrac{-15}{4}$
36) $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=1$	37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$	38) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=2$
39) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=\infty$	40) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ *No existe*	41) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\lvert x\rvert}{2x}=0$
42) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$	43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$	44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x}=1$
45) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}=\cos a$	46) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=-sen\,a$	47) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{x^2}=-20$

TEMA 12 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

12.1 – CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

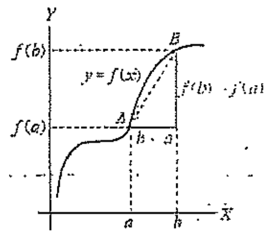
TASA DE VARIACIÓN MEDIA

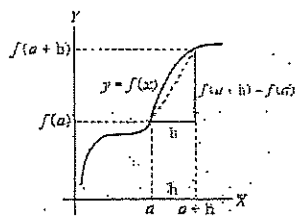
Definición

Se llama **tasa de variación media** (T.V.M.) de una función, y = f(x) en un intervalo [a,b] al cociente: $\text{T.V.M.}[a,b] = \dfrac{\text{Variación de f(x)}}{\text{Variación de x}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

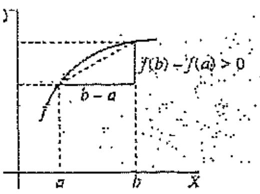
Y es la pendiente del segmento que une los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b))

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión [a,a+h], nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. En tal caso, la tasa de variación media se obtiene : $\text{T.V.M.}\ [a,a+h] = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

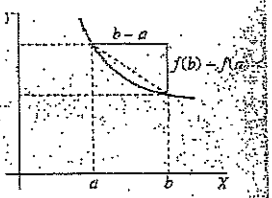




Si una función es creciente en [a,b], su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



T.V.M. [a, b] > 0



T.V.M. [a, b] < 0

TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Definición: Se llama **tasa de variación instantánea** (T.V.I) de una función, y = f(x) en un punto a

$$\text{T.V.I.}(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y es la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto x = a.

Significado:

Si es positiva ⇒ La función es creciente en el punto a

Si es negativa ⇒ La función es decreciente en el punto a

0,65

12.2 – DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

DEFINICIÓN

Llamaremos **derivada de una función y = f(x) en el punto x = a** a la tasa de variación instantánea de dicha función en el punto a, y se designa por f ′(a):

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

SIGNIFICADO

La derivada de la función y = f(x) en el punto x = a es **la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto x = a**
Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto x = a :

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

APLICACIONES

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ La función es creciente en el punto x = a
- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ La función es decreciente en el punto x = a
- Si hay un máximo o mínimo relativo en $x = a \Rightarrow f'(a) = 0$

12.3 – FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

Se llama **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a una función f ′ que asocia a cada abscisa, x, la derivada de f en ese punto, f ′(x), es decir, la pendiente de la curva y = f(x) en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f ′ o Df:

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

12.4 – REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número : $(k.f(x))' = k.f'(x)$
- Suma y resta: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto : $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- Cociente : $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición : $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x. \text{Ln } a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}.\text{Ln } a.f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}.f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x.\text{Ln}a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x).\text{Ln}a}$
$y = \text{Ln } x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \text{Ln } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \cos x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \cos f(x).f'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\text{ sen } x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -\text{ sen } f(x).f'(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = [1 + \text{tag}^2 f(x)].f'(x)$
$y = \text{arcsen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arccos } f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arctag } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arctag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

12.5 – UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA

CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN VARIOS PUNTOS

Para hallar $f'(a)$ se calcula la expresión general de la derivada $f'(x)$ y luego se sustituye en la derivada la x por a.

OBTENER LAS ABSCISAS EN LAS CUALES LA DERIVADA TIENE UN CIERTO VALOR

Para averiguar los valores de x para los cuales $f'(x) = k$, se calcula la expresión de la derivada en general $f'(x)$, se iguala a k y se resuelve la ecuación.

OBTENER LAS ABSCISAS DE LOS PUNTOS SINGULARES

Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación : $f'(x) = 0$

OBTENER LOS TRAMOS DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si $f'(x) > 0$ la función es creciente y si $f'(x) < 0$ la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

12.6 – ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

DOMINIO

- Polinomio : D = R
- Cocientes : D = R – {puntos que anulan el denominador}
- Raíces de índice par : D = {Lo de dentro de la raíz ≥ 0}
- Raíces de índice impar : D = R
- Logaritmos : D = {Lo de dentro del logaritmo > 0}
- Exponenciales : D = R
- Trigonométricas : Seno y coseno D = R ; El resto se estudia como un cociente
- Arcos : D = {$-1 \leq$ Lo de dentro del arco ≤ 1}

PUNTOS DE CORTE

- Con el eje OX : $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0,0)$
- Con el eje OY : $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow P(0,y_0)$

SIMETRÍA

- Simétrica respecto del OY o par: $f(-x) = f(x)$
- Simétrica respecto del Origen o impar : $-f(-x) = f(x)$

SIGNO DE LA FUNCIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \ldots$
- Se resuelve la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \ldots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f(x)$ se obtiene el signo de la función

ASÍNTOTAS

- Asíntotas verticales: Puntos donde la función se va al infinito: $y \Rightarrow \infty$, $x = a$
  - Cocientes: Puntos que anulan el denominador
  - Logaritmos : Puntos que anulan lo de dentro del logaritmo
  - Aproximación a la asíntota : Calcular límites laterales
- Asíntotas horizontales : Puntos donde la x se va al infinito : $x \Rightarrow \infty$, $y = b$
  - Cálculo : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$
  - Aproximación(en $x = \pm 100$): $\begin{cases} f(x) > b \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < b \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$
- Asíntotas oblicuas
  - Cálculo : $y = mx + n$; $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$
  - Aproximación(en $x = \pm 100$): $f(x) > \text{Asint}(x) \Rightarrow$ La función por encima de la asíntota
    $f(x) < \text{Asint}(x) \Rightarrow$ La función por debajo de la asíntota

MONOTONIA Y PUNTOS CRÍTICOS

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \ldots$
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \ldots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f'(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f'(a) > 0$ la función es creciente en dicho intervalo, y si es < 0 es decreciente.

- Máximo relativo : P(a,f(a)) : x = a es el punto del dominio donde la función pasa de creciente a decreciente.
- Mínimo relativo : P(a,f(a)) : x = a es el punto del dominio donde la función pasa de decreciente a creciente.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \ldots$
- Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \ldots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f''(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f''(a) > 0$ la función es convexa en dicho intervalo, y si es < 0 es concava.

- Puntos de inflexión : P(a,f(a)) : x = a es el punto del dominio donde la función cambia la curvatura.

TABLA DE VALORES

Dando valores a la "x" se calculan los correspondientes de la "y" sustituyendo en la función

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

TEMA 12 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

Tasa de variación media. Cálculo y significado

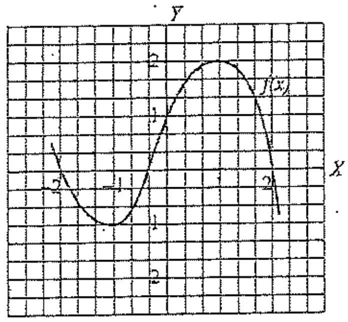
EJERCICIO 1 : Consideramos la función: $f(x)=\frac{x^2-1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si f(x) crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIO 2 :

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3,-1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, f(x), en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a) $[-2, -1]$ b) $[0, 1]$



Derivada de una función por la definición

EJERCICIO 4 : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x)=\frac{2x+1}{4}$. d) $f(x)=\frac{3}{x}$.

EJERCICIO 5 : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a) $f(x)=\frac{3x+1}{2}$, en x = -1 b) $f(x)=\frac{1}{x}$, en x = 2 c) $f(x) = 3x^2 + 2x$ en x = 1 d) $f(x)=\frac{x^2}{3}$, en x = 1

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 6 : Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$
2) $y = x$
3) $y = 3x$
4) $y = x^5$
5) $y = 3.x^6$
6) $y = \frac{3}{5}.x^{10}$
7) $y = \frac{3x^2}{4}$
8) $y = 2x^4-3x^3+x^2-7$
9) $y = \frac{1}{x^4}$
10) $y = 5.\left(\frac{1}{x^3}+x^{-2}\right)$
11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$
12) $y = \frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3-8x$
13) $y = \frac{1}{x^2}+x^3+2.x^{-1}$
14) $y = 2.\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)$
15) $y = \frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^3}$
16) $y = \frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{x}$
17) $y = (x^2 - 1).(x^3 + 3x)$
18) $y = (x^2 -1)/(x^3 + 3x)$
19) $y = \frac{x^2-1}{x+4}$
20) $y = \frac{1}{x}$
21) $y = \frac{x^2-x+3}{5}$
22) $y=x^2-\frac{1}{x^3}+\frac{3x}{1+x}+\frac{4-x}{x}$
23) $y = (x^3 + 1).(x + 2)$
24) $y = (x^3 + 2).x^{-2}$
25) $y = \frac{2}{x^3+2}$
26) $y = \frac{x^3-3}{5}$
27) $y = \frac{2}{3x^2+1}$

28) $y=\dfrac{1}{1-3x^3}$

29) $y=\dfrac{x^2-2}{x^3+3x^2}$

30) $y=\dfrac{x^3}{x-3}$

31) $y=(3x^3-2x+7)^7$

32) $y=3.(x^2-x+1)^3$

33) $y=(2x^4-4x^2-3)^5$

34) $y=(2x^3+x)^4$

35) $y=5.(x^3-3x)^4$

36) $y=\dfrac{(x^4-5x)^2}{(x^3-3x)^5}$

37) $y=(x^3-2x)^3.(2x^4-x^2)^2$

38) $y=\dfrac{(x^3-2x)^3}{(2x^4-x^2)^2}$

39) $y=\sqrt[3]{x}$

40) $y=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

41) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

42) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{3}}$

43) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

44) $y=\sqrt[5]{x^3-7x}$

45) $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$

46) $y=5x^3+\sqrt[3]{x}+1$

47) $y=x^2.\sqrt[3]{x}$

48) $y=(x-\sqrt{1-x^2})^2$

49) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

50) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

51) $y=5.(x^3-2x^2+x)^4$

52) $y=\dfrac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$

53) $y=e^{\sqrt{x}}$

54) $y=\dfrac{1}{e^{2x}}$

55) $y=x^2.e^{3x}$

56) $y=\dfrac{x}{e^x}$

57) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

58) $y=\dfrac{x^2-x}{e^x}$

59) $y=\log_3 x$

60) $y=\log_2 x^3$

61) $y=\log x$

62) $y=\operatorname{Ln}(x^2-1)$

63) $y=\log_2\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

64) $y=\operatorname{Ln}\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$

65) $y=\log\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$

66) $y=\dfrac{\operatorname{Ln}x}{x^5}$

67) $y=\operatorname{Ln}[x^3.(x+2)]$

68) $y=\operatorname{Ln}\sqrt[3]{1+x^2}$

69) $y=\operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

70) $y=\operatorname{Ln}\dfrac{x^2+3}{2x-1}$

71) $y=(\log x+1).\sqrt{x^2+1}$

72) $y=\operatorname{tag}2x$

73) $y=\operatorname{sen}2x$

74) $y=\operatorname{sen}x^2$

75) $y=\operatorname{sen}^2 x$

76) $y=\operatorname{sen}^2 2x$

77) $y=\operatorname{sen}^2 x^2$

78) $y=\operatorname{sen}^5 2x^3$

79) $y=5.\operatorname{sen}^3 2x^4$

80) $y=e^{\cos x}$

81) $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$

82) $y=\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$

83) $y=\operatorname{tag}(x+3)^2$

84) $y=\operatorname{tag}^2(x+3)$

85) $y=\operatorname{Ln}\left(\cos\dfrac{x^2}{2}\right)$

86) $y=\operatorname{tag}(1-2x)$

87) $y=\operatorname{tag}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

88) $y=\dfrac{\operatorname{cosec}x}{\sec x}$

89) $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}$

90) $y=\operatorname{sen}(x+e^x)$

91) $y=\operatorname{Ln}\left[\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right]$

92) $y=\cos x.(1-\cos x)$

93) $y=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}$

94) $y=\operatorname{Ln}(x^2.\operatorname{sen}2x)$

95) $y=\dfrac{x.\operatorname{sen}^2 x}{e^x-1}$

96) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

97) $y=\dfrac{-\cos 2x}{2}$

98) $y=\operatorname{Ln}(\operatorname{tag}2x)$

99) $y=\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}x)$

100) $y=\operatorname{sen}^3(x+1)$

101) $y=\sec^2 x$

102) $y=\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$

103) $y=\operatorname{sen}[\cos(\operatorname{tag}x)]$

104) $y=\operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}$

105) $y=\operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

106) $y=\operatorname{Ln}(\operatorname{tag}^2\sqrt{x})$

107) $y=\operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

108) $y=\operatorname{Ln}\dfrac{(x-1)^2}{2x-3}$

109) $y=\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}^2 x)$

110) $y=e^{\cos 2x}$

111) $y=\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}^2x.\cos^3x)$

112) $y=\operatorname{sen}^2x-\cos^2x$

113) $y=\operatorname{sen}(x+1)^3$

<u>EJERCICIO 7</u> - Halla la función derivada de:

a) $y=3x^5-4x^3+3x+7$ b) $y=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}+5x-15$ c) $y=\dfrac{x^2-3x+7}{5}$

d) $y=(3x^3-5x+1).(x+x^2)$ e) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$ f) $y=\dfrac{x^3}{3x+2}$ g) $y=\left(\dfrac{3x-2}{7-9x}\right)^2$

h) $y=\dfrac{(5-x)^2}{3x-1}$ i) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}$ j) $y=\sqrt{x^9}.4x^5$ k) $y=\dfrac{2}{x^5}+\sqrt{3}$

l) $y=\sqrt{12x}+e^{2x+1}+\log_2 3x$ m) $y=(3x-1)^2.(1-4x)$ n) $y=\dfrac{x^5\sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5}$ ñ) $y=(3x^3-5x+2)^4$

o) $y=(3x^2-x)^{-4}$ p) $y=\sqrt{3x^2-\sqrt{5x}}$ q) $y=\sqrt{1-x^2}$ r) $y=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3$

s) $y=(2x-4)^4+2.\sqrt{x^2-1}$ t) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}$ u) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}$ v) $y=\text{Ln}\,(x^2+2x)+e^{-x}$

w) $y=\log_3 x+3^x$ x) $y=2.\text{sen}(3x+4)$ y) $y=3\cos^3(3x)$ z) $y=\text{tag}(x^2+1)$

1) $y=\sqrt[5]{x^3-x}$ 2) $y=x.e^x$ 3) $y=\dfrac{\text{Ln}x}{\text{sen}x}$ 4) $y=4.(2x^3-1)^5$

5) $y=e^{\sqrt{x+3}}$ 6) $y=\sqrt[3]{\text{Ln}(3x+5)}$ 7) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 8) $y=\text{tag}\sqrt{3x+2}$

Recta tangente

EJERCICIO 8 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-2x$ en el punto de abscisa $x=2$.

EJERCICIO 9 - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y=3x^2+x-1$.

EJERCICIO 10 - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x)=x^3+6x^2-15x$

EJERCICIO 11 - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

EJERCICIO 12 - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=2x^2+3x-1$ en el punto de abscisa $x=1$

EJERCICIO 13 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x-4x^2$ que sea paralela a la recta $y=-7x+3$.

EJERCICIO 14 - Halla la ecuación de la recta de pendiente -4 que sea tangente a la curva $y=x^4+2$.

EJERCICIO 15 - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y=2x^3+x$ en el punto de abscisa $x=-1$

Crecimiento y extremos relativos

EJERCICIO 16 – Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función: $f(x)=x^4-2x^2$

Representar funciones que cumplan unas condiciones

EJERCICIO 17 : Dibuja la gráfica de la función $f(x)$ sabiendo que:

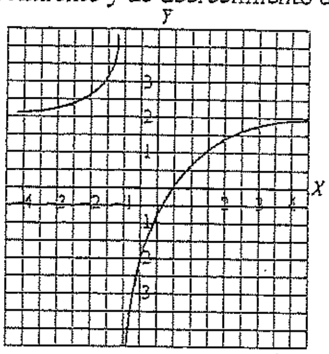
- Su derivada se anula en $(0,\,0)$
- Solo corta a los ejes en $(0,\,0)$
- Sus asíntotas son $x=-2$, $x=2$ e $y=0$
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es: $\begin{cases}\text{Si } x\to-\infty,\ y<0\\ \text{Si } x\to+\infty,\ y<0\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$

EJERCICIO 18 : Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que:

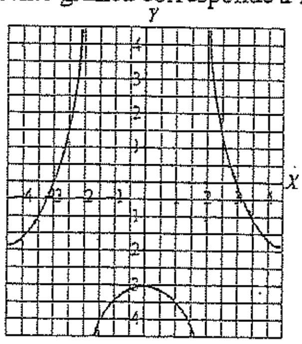
- Es continua.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
- Su derivada se anula en $(-3,-2)$, en $(0,\,2)$ y en $(2,-3)$.
- Corta a los ejes en los puntos $(-4,\,0)$, $(-2,\,0)$, $(1,\,0)$, $(3,\,0)$ y $(0,\,2)$.

Dada una gráfica, estudiar propiedades

RCICIO 19 : A partir de la gráfica de $f(x)$, di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



EJERCICIO 20 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



a) ¿En qué puntos se anula la derivada?

b) ¿Cuáles son sus asíntotas?

c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Estudiar y representar funciones

EJERCICIO 21 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-12x$ b) $f(x)=x^3-4x^2+4x$ c) $f(x)=x^4+2x^2+1$ d) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{3x}{x-3}$ f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ g) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

i) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ j) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+2}$ k) $f(x)=\dfrac{x^4-4}{x^2-1}$ l) $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2}$

m) $f(x)=\dfrac{2x^5}{x^2+1}$

Recopilación

EJERCICIO 22 :

a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$

b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x=2$?

EJERCICIO 23 : Dada la función: $f(x)=4x^2-2x+1$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x=0$? ¿Y en $x=1$?

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

EJERCICIO 24 :
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=2x-3x^2$ en el punto de abscisa $x=2$.
b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 25 : Consideramos la función: $f(x)=5x^2-3x$
a) ¿Crece o decrece en $x=-1$? ¿Y en $x=1$?
b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 26 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{4}$

EJERCICIO 27 : Dada la siguiente función: $f(x)=14x-7x^2$
a) ¿Es creciente o decreciente en $x=0$? ¿Y en $x=4$?
b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 28 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:
$$f(x)=x^3-x^2-8x+12$$

EJERCICIO 29 : Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:
$f(x)=x^4-8x^2+1$

EJERCICIO 30 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x-1)^2(x+8)$ b) $f(x)=2x^4-4x^2+1$ c) $f(x)=x^3+3x^2-9x$ d) $f(x)=4x^2-2x^4+2$

e) $f(x)=x^3+2x^2+x$ f) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$

i) $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}$ j) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2}$ k) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$ l) $f(x)=x^3+3x^2+3x$

m) $f(x)=x^4-2x^2+\dfrac{1}{2}$ n) $f(x)=x(x-3)^2$ ñ) $f(x)=x^4-8x^2$ o) $f(x)=\dfrac{x^2+6x+12}{x+4}$

p) $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ q) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ r) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-4x}$ s) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

1. Aplicando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto que se indica:

   a. $f(x)=x^3+x^2 \;\; en \;\; x=2$ b. $f(x)=\dfrac{1}{x} \;\; en \;\; x=-1$

   c. $f(x)=\sqrt{x+1} \;\; en \;\; x=2$ d. $f(x)=x^3+3 \;\; en \;\; x=1$

2. ¿En qué punto no es derivable la función $f(x)=|x+1|$?

3. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

   a. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ b. $f(x)=\left(x+2\sqrt{x}\right)^3$ c. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x^3}$

   d. $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ e. $f(x)=1-\dfrac{2}{x^2}$ f. $f(x)=\dfrac{\ln x}{7}+\dfrac{2}{x}$

   g. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ h. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ i. $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}$

   j. $f(x)=\dfrac{senx+\cos x}{1-senx}$ k. $f(x)=3x\cdot senx+4$ l. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

   m. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}$ n. $f(x)=x\cdot senx$ ñ. $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{x}$

   o. $f(x)=5\sqrt{x}+\sqrt{5x}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^3}}$ p. $f(x)=Ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)$ q. $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{(2x+1)^3}$

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

   a. $f(x)=Ln(sen3x)$ b. $f(x)=\cos^3 x-\cos\left(x^3\right)$ c. $f(x)=Ln\left(sen\sqrt{3x}\right)$

   d. $f(x)=x\cdot e^x\cdot sen3x$ e. $f(x)=arcsen(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$ f. $f(x)=arcsen\left(1-e^{7x}\right)$

   g. $f(x)=\dfrac{\left(1+x^2\right)arctgx}{senx}$ h. $f(x)=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ i. $f(x)=Ln\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-senx}}$

   j. $f(x)=sen\sqrt{x^2+3}$ k. $f(x)=\dfrac{e^x+Ln\left(x^2+1\right)}{tgx}$ l. $f(x)=Log(sen7x)$

   m. $f(x)=e^{7x+sen3x}$ n. $f(x)=x^4+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+3}}$ ñ. $f(x)=e^x\cdot senx+e^x\cdot\cos x$

   o. $f(x)=tg\left(Ln\dfrac{x+2}{3x}\right)$ p. $f(x)=\dfrac{tg(3x+2)}{\cos(7x-1)}$ q. $f(x)=x^5\cdot Log5x-\dfrac{tgx}{x}$

5. Dada la función $f(x)=mx^2-3x+5$, calcula el valor de m para que .

6. Determina el punto de la curva $f(x)=-2x^2+x$ en el que la recta tangente forma un ángulo de 135° con el eje de abscisas en sentido positivo.

7. Determina los intervalos de monotonía y extremos de las siguientes funciones:

   a. $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$ b. $f(x)=4x^3-24x$ c. $f(x)=xe^x$

8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ en .

9. Averigua los puntos en los que la recta tangente a la curva $f(x) = x\,Lnx$ cumple:
   a. Es horizontal.
   b. Forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas en sentido positivo.

10. Explica por qué no es derivable la siguiente función:

11. Calcula una función de segundo grado de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$ sabiendo que pasa por el punto (1,3) y que en el punto de abscisa 2 su tangente tiene pendiente 1.

12. ¿En qué punto es paralela la tangente de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 7x$ a la bisectriz del primer cuadrante? ¿Y a la del segundo cuadrante?

13. Representa las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - 3x - 1$ *b.* $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x}$ *c.* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ *d.* $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 36x^2$

14. Sea la función :
   a. Determina su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b. Calcula sus asíntotas y extremos.
   c. Representa gráficamente la función.

15. La función x 1600) representa el beneficio, en miles de euros, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto. Dibuja la gráfica de la función e india cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas. Determina también cuál es el mayor beneficio posible y cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo.

16. Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado, la diferencia sea máxima.

17. Halla dos números tales que su suma sea 36 y su producto sea máximo.

18. Calcula las dimensiones que deben tener los lados de un terreno rectangular de 80 m. de perímetro si queremos que su área sea máxima.

19. Halla las dimensiones de un rectángulo de 64 m^2 para que su perímetro sea mínimo.

20. Un ganadero quiere construir tres rediles rectangulares contiguos e iguales, para lo que dispone de 1.000 m. de cerca. ¿Qué dimensiones debe tener cada redil para que tengan área máxima?

21. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 8 €/m y la de los otros lados 1€ /m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 2880 €.

22. Recortando un cuadrado de cada esquina de un cartón rectangular de 6 y 8 cm. de lado, se quiere construir una caja sin tapa. ¿Qué medida debe tener el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea máximo?

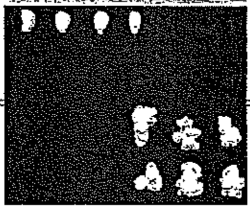
23. Halla el radio de la base y la altura del cono de 3 m. de generatriz y de volumen máximo.

24. Un alambre de un metro de longitud se divide en dos trozos y con ellos se construyen un cuadrado y un círculo. Calcula la longitud que ha de tener cada trozo para que la suma de las áreas sea mínima.

25. Se desea construir una caja rectangular cerrada de base cuadrada y volumen 27 dm^3. Hallar las dimensiones para que la superficie total de la caja sea mínima.

UNIDAD 13: PROBABILIDAD

- Experimentos aleatorios. Espacio muestral
- Sucesos. Espacio de sucesos
- Operaciones con sucesos. Álgebra de Boole
- Ley de los grandes números. Idea de probabilidad
- Definición axiomática de probabilidad
- Experimentos compuestos. Diagrama en árbol
- Probabilidad condicionada
- Probabilidad total. Teorema de Bayes



AZAR Y DETERMINISMO

La dicotomía azar-determinismo es uno de esos problemas en los que cualquiera de las dos opciones resulta insatisfactoria. Si el mundo es determinista, todo está escrito, y esto es algo que rechazamos instintivamente. Pero también rechazamos instintivamente que la realidad sea puro azar, y achacamos el aspecto azaroso de un suceso a la falta de información sobre sus causas.

Las palomitas de maíz son un fenómeno estadístico muy interesante. Un montón de granos de maíz se fríen en una olla. Cuando se dan ciertas condiciones, los granos estallan y se abren en una especie de flor blanca. Pero no se abren todos a la vez. Unos van primero, otros después. ¿De qué depende que un grano se abra? No lo sabemos. Posiblemente de la temperatura, de la estructura particular de cada uno... Como los detalles son muy complicados, sólo podemos aspirar a describir las palomitas con probabilidades. Una forma de hacerlo sería anunciar qué proporción de los granos han estallado al minuto de estar al fuego, a los dos minutos, a los tres, a los cuatro... Hablar de cada grano individual sería dificilísimo. No sabríamos qué propiedades del grano usar para el análisis. Pero quizá algún día se pueda, y en ese caso podremos saber cuándo se convertirá en palomita cada uno de los granos de maíz.

En la física anterior a la cuántica, llamada *física clásica*, se usaban probabilidades cuando el fenómeno era tan complicado que no había esperanza de tomar conocimiento de todos los detalles pertinentes. La cosa no era imposible, sin embargo. Se podía uno imaginar que, con gran laboriosidad, se podría analizar el fenómeno y describirlo con toda certeza, sin usar probabilidades.

En la mecánica cuántica, en cambio, sólo caben las descripciones probabilísticas, como la de las palomitas. Si en vez de granos de maíz tomamos, por ejemplo, átomos radiactivos que pueden desintegrarse o no en un lapso dado, la situación es similar. Sólo podemos saber qué proporción de los átomos se habrán desintegrado al cabo de cierto tiempo, pero no en qué momento lo hará cada átomo. La diferencia con las palomitas es fundamental: las palomitas las tratamos con probabilidades porque recoger los datos necesarios para el análisis exacto sería demasiado complicado; los átomos, en cambio, son probabilísticos por naturaleza. Según la mecánica cuántica (o quienes la interpretan), el mundo cuántico es probabilístico porque NO HAY datos más detallados que recoger. Un átomo se desintegra en un momento dado porque sí, no porque algo en su estructura determine que ha de hacerlo.

Este aspecto probabilístico de la mecánica cuántica molestaba mucho a Albert Einstein: nunca se hizo a la idea de que en el universo hubiera fenómenos que ocurren porque sí, sin causa alguna. Por eso Einstein, en una carta a su amigo Max Born, dijo que no podía creer que Dios jugara a los dados con el universo.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL

Un **experimento determinista** es aquel en el que puede predecirse el resultado antes de ser efectuado.

Ej.) - Lanzamos un objeto al vacío y medimos su aceleración
- Calentamos un cubito de hielo a 80 ºC durante unos minutos

Un **experimento aleatorio** es aquel en el que no puede predecirse el resultado, por las razones que sean (ver artículo *Azar y Determinismo*).

Ej.) - Lanzamos un dado y anotamos el resultado
- Extraemos una carta de la baraja y comprobamos la carta elegida

El conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y se representa por **E**

Ej.) - Lanzamos un dado: E = {1,2,3,4,5,6}
- Lanzamos dos monedas: E = {CC,CX,XC,XX} (C es cara, X es cruz)

SUCESOS. ESPACIO DE SUCESOS

Se llana **suceso** o **suceso aleatorio** de un experimento aleatorio a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Llamamos **espacio de sucesos** al conjunto formado por todos los sucesos del experimento (todos los subconjuntos de E). Se representa por S.

Ej.) Lanzamos un dado de quinielas: E = {1,X,2}. El espacio de sucesos será:

$$S=\{\underbrace{\Phi}_{\substack{\text{suceso}\\\text{imposible}}},\underbrace{\{1\},\{X\},\{2\}}_{\substack{\text{sucesos}\\\text{elementales}}},\underbrace{\{1,X\},\{1,2\},\{X,2\}}_{\substack{\text{sucesos}\\\text{compuestos}}},\underbrace{\{1,X,2\}}_{\substack{\text{suceso}\\\text{seguro}}}\}$$

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3=8 \text{ elementos}$$

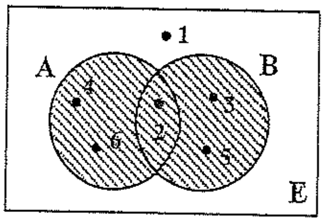
Suma de los elementos de la fila 3 en el triángulo de Pascal.
En general, si el espacio muestral tiene **n** elementos, el espacio de sucesos tendrá $\mathbf{2^n}$ elementos

OPERACIONES CON SUCESOS. ÁLGEBRA DE BOOLE

➢ Unión

La unión de dos sucesos A y B, que se representa por $A \cup B$, es el suceso que se realiza cuando lo hacen A o B.

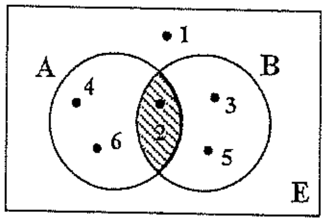
Ej.) Lanzamiento de un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Consideremos los sucesos:
A = “salir par” = {2,4,6}, B = “salir primo” = {2,3,5}.
La unión será:
C = “salir par o primo” = $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$



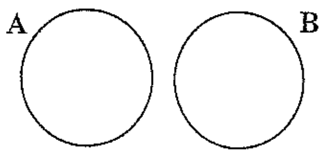
➢ Intersección

La intersección de dos sucesos A y B, que se representa por $A \cap B$, es el suceso que se realiza cuando lo hacen A y B.

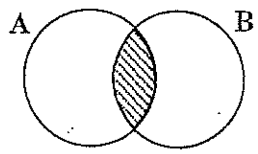
Ej.) Lanzamiento de un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Consideremos los sucesos:
A = “salir par” = {2,4,6}, B = “salir primo” = {2,3,5}.
La intersección será:
C = “salir par y primo” = $A \cap B = \{2\}$



Si la intersección de dos sucesos es el suceso imposible (conjunto vacío), se dice que dichos sucesos son **incompatibles**. En caso contrario, se dice que son **compatibles.**



$A \cap B = \{\Phi\} \Rightarrow$ incompatibles



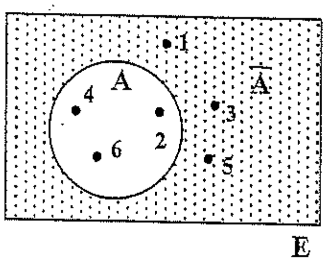
$A \cap B \neq \{\Phi\} \Rightarrow$ compatibles

➢ Suceso contrario o complementario de A

Es el que se verifica cuando no se realiza A. Se representa por $\overline{A}$.

Ej.) Lanzamiento de un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

A = “salir par” = {2,4,6}
$\overline{A}$ = “salir impar” = {1,3,5}



➤ Propiedades

	UNIÓN	INTERSECCIÓN
ASOCIATIVA	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
CONMUTATIVA	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
IDEMPOTENTE	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
DE COMPLEMENTACIÓN	$A \cup \overline{A} = E$	$A \cap \overline{A} = \Phi$
SIMPLIFICATIVA	$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$	
DISTRIBUTIVA	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
LEYES de DE MORGAN	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

La terna $(S, \cup, \cap)$, formada por el espacio de sucesos asociado a un espacio muestral **E** y las operaciones de unión e intersección con las propiedades vistas, recibe el nombre de **álgebra de Boole.**

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS. IDEA DE PROBABILIDAD

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso **A** al nº de veces que ha ocurrido dicho suceso a lo largo de **n** pruebas. Si dividimos la frecuencia absoluta entre el nº de pruebas, obtendremos la **frecuencia relativa**: $f_r(A) = \dfrac{f(A)}{n}$

Ej.) Lanzamos un dado y anotamos el nº de veces que sale el 3.

nº de lanzamientos	10	20	40	80	150	200	300
f(3)	2	3	7	14	24	33	50
$f_r(3)$	0,2	0,15	0,17	0,17	0,16	0,16	$0,1\widehat{6}$

Observamos que la frecuencia relativa tiende a estabilizarse en el valor $0,1\widehat{6}$

Según la **Ley de los grandes números**, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. A este número lo denominaremos **probabilidad del suceso:**

$$\boxed{P(A)=\lim_{n\to\infty} f_r(A)}$$

Según esta definición, para calcular la probabilidad de un suceso será necesario realizar un gran número de pruebas. Este inconveniente se resuelve con la definición axiomática, es decir, basada en suposiciones iniciales que tengan en cuenta las propiedades de las frecuencias relativas.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Se llama **probabilidad** a toda función P que asocia a cada suceso A, del espacio de sucesos, un número real, que llamaremos **probabilidad de A** y representamos por P(A), cumpliendo los siguientes axiomas:

Axioma 1. La probabilidad del suceso seguro es 1: $\boxed{P(E)=1}$

Axioma 2. La probabilidad de un suceso cualquiera no puede ser negativa: $\boxed{P(A)\geq 0}$

Axioma 3. Para 2 sucesos incompatibles, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades de ambos: $\boxed{\text{Si } A\cap B=\Phi \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

➢ Consecuencias de la definición

1. $P(\Phi)=0$
2. $P(A)=1-P(\overline{A})$
3. $0\leq P(A)\leq 1$
4. Regla de Laplace. Históricamente, es anterior a la definición axiomática. Sin embargo, puede deducirse de los axiomas. Dice así: **"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el nº de casos favorables al suceso A y el nº de casos posibles".**

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}}$$

Ejercicio. *Se ha encargado la impresión de una encuesta. El impresor informa que de cada millar de folios la máquina estropea 12 folios. Halla la probabilidad de que elegido un folio al azar: a) esté mal impreso, b) esté correctamente impreso.*

a) $P(\text{folio mal impreso})=P(M)=\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\dfrac{12}{1000}=\mathbf{0{,}012}$

b) $P(\text{folio bien impreso})=P(\overline{M})=1-P(M)=1-0{,}012=\mathbf{0{,}988}$

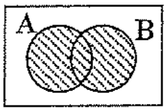
Ejercicio. ***¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de ocho puntos al lanzar dos dados?***

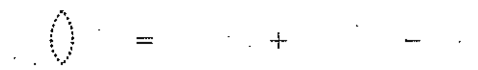
$$\left.\begin{array}{l}\text{Casos posibles: } 6 \times 6 = 36 \\ \text{Casos favorables: } \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}\end{array}\right\} \ \mathbf{P(sumar\ 8)} = \frac{5}{36}$$

5. <u>Probabilidad de la unión para sucesos compatibles.</u>

$$\boxed{\textbf{Si } A \cap B \neq \Phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Si consideramos que la probabilidad de un suceso es proporcional a la superficie que lo representa





$$P(A \cup B) \; = \; P(A) \; + \; P(B) \; - \; P(A \cap B)$$

Ejercicio. ***Por una encuesta realizada entre los estudiantes de Bachillerato de un instituto, se sabe que el 40% lee el periódico y el 30% lee alguna revista de información general. Además, el 20% lee periódicos y revistas. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, lea el periódico o alguna revista?***

Sean los sucesos: PE = "lee el periódico" , R = "lee alguna revista". Las probabilidades son: $P(PE) = 0{,}4$, $P(R) = 0{,}3$, $P(PE \cap R) = 0{,}2$.

Por tanto, $P(PE \cup R) = P(PE) + P(R) - P(PE \cap R) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}2 = \mathbf{0{,}5}$, es decir, el **50%**

<u>EXPERIMENTOS COMPUESTOS. DIAGRAMA EN ÁRBOL</u>

Los **experimentos compuestos** son los formados por varios experimentos simples que se efectúan consecutivamente. Llamamos **espacio compuesto o espacio producto** al conjunto de todos los resultados elementales que tienen lugar en un experimento compuesto.

Los **diagramas en árbol** son una buena herramienta para el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Para ello, hemos de tener en cuenta:

- Se dibuja una rama para cada resultado posible, y se indica sobre ella la probabilidad correspondiente. Las probabilidades de las ramas que confluyen en un punto, suman 1.
- La probabilidad de un suceso se obtiene multiplicando las probabilidades de las ramas asociadas al camino seguido.
- Si un suceso comprende varios caminos, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de todos ellos.

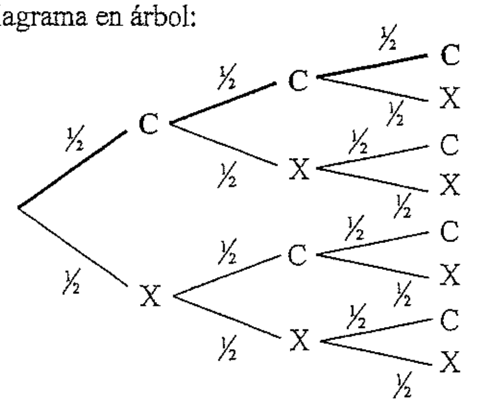
Ejercicio. *Lanzamos 3 veces una moneda. Halla la probabilidad de obtener 3 caras.*

Hay 8 sucesos elementales: CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX.

- Aplicando Laplace:

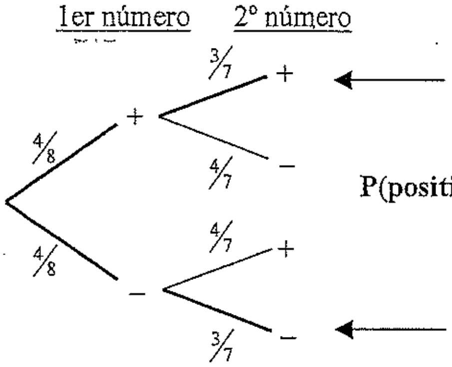
  casos posibles = 8 , casos favorables = 1. Por tanto: **P(3 caras)** $= \frac{1}{8}$

- Diagrama en árbol:



P(3 caras) $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Ejercicio. *Se consideran 8 números, 4 positivos y 4 negativos. Elegimos dos de ellos al azar y los multiplicamos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado un número positivo?*



P(positivo) $= P(++) + P(--) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Veámoslo con un ejemplo: *En una empresa hay 100 hombres y 100 mujeres. De todos ellos, unos fuman y otros no, de acuerdo a la siguiente tabla:*

	H	**M**	TOT
F	70	10	80
$\overline{\mathbf{F}}$	30	90	120
TOT	100	100	200

Probabilidad de ser mujer: $P(M) = \frac{\text{casos posibles}}{\text{casos favorables}} = \frac{100}{200}$

Probabilidad de ser mujer y fumar: $P(M \cap F) = \frac{10}{200}$

Dividiendo ambas expresiones:

$\frac{\mathbf{P(M \cap F)}}{\mathbf{P(M)}} = \frac{10/200}{100/200} = \frac{10}{100}$ = "Prob. de fumar siendo mujer" = **P(F/M)**

En general, la probabilidad del suceso **B** condicionado a que ocurra **A** viene dada por:

$\boxed{P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)},\ \text{con } P(A)\neq 0.}$ Despejando: $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)}$

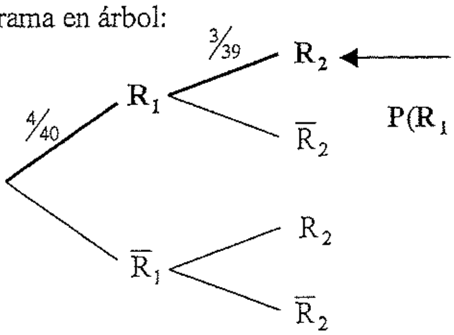
Probabilidad de la intersección

Ejercicio. ***Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes?***

Sean: $\mathbf{R_1}$ = "sacar rey en la 1ª extracción", $\mathbf{R_2}$ = "sacar rey en la 2ª extracción"

$$\mathbf{P(R_1\cap R_2)}=P(R_1)\cdot P(R_2/R_1)=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{130}}$$

- Diagrama en árbol:



$$\mathbf{P(R_1\cap R_2)}=P(R_1R_2)=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{130}}$$

➢ Independencia de sucesos

Dos sucesos, **A** y **B**, son independientes cuando la verificación de uno de ellos no modifica la probabilidad del otro:

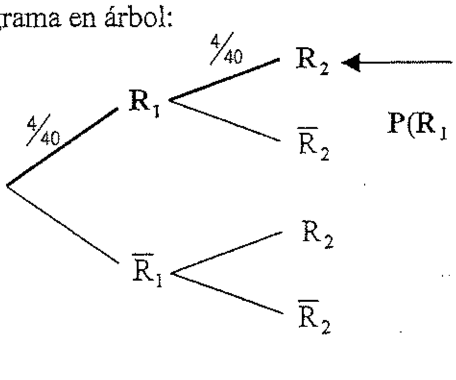
$\boxed{\text{A y B son independientes} \Leftrightarrow \mathbf{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}}$

Ejercicio. ***Igual que el anterior, pero con "reemplazamiento" (volvemos a introducir en la baraja la 1ª carta extraída).***

Sean: $\mathbf{R_1}$ = "sacar rey en la 1ª extracción", $\mathbf{R_2}$ = "sacar rey en la 2ª extracción"

$$\mathbf{P(R_1\cap R_2)}=P(R_1)\cdot P(R_2)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$$

- Diagrama en árbol:

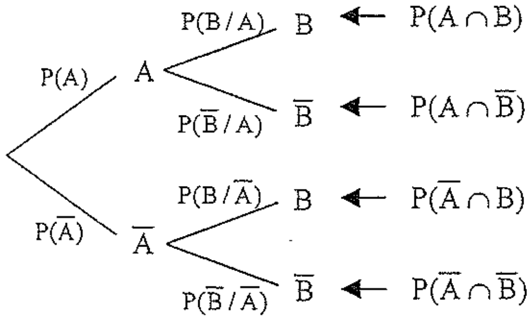


$$\mathbf{P(R_1\cap R_2)}=P(R_1R_2)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$$

➢ Tabla de contingencia

Es una tabla que nos permite organizar los elementos del espacio muestral según dos características (tabla de doble entrada). En ciertos problemas (sobre todo, en los que hemos de hallar probabilidades condicionadas) resulta más cómoda que el diagrama en árbol. No obstante, puede convertirse una en otro o viceversa:

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\overline{A})$	**1**



Ejercicio. ***En una ciudad, el 55 % de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan de multicereales y el 20% consume de ambos.***

a) ***Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan de multicereales?***

b) ***Sabiendo que un habitante consume pan de multicereales, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma pan integral?***

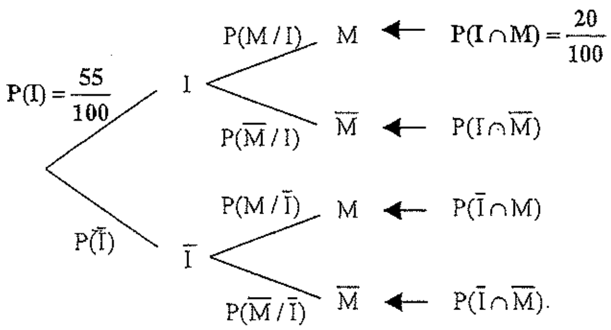
c) ***¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma de ninguno de los dos tipos de pan?***

	I	$\overline{I}$	TOTAL
M	**20**	10	**30**
$\overline{M}$	35	35	70
TOTAL	**55**	45	**100**

M = "consume pan multicereales"
I = "consume pan integral"

$$P(M/I)=\frac{20}{55} \qquad P(\overline{I}/M)=\frac{10}{30} \qquad P(\overline{M}\cap\overline{I})=\frac{35}{100}$$

Si hubiésemos optado por un diagrama en árbol:



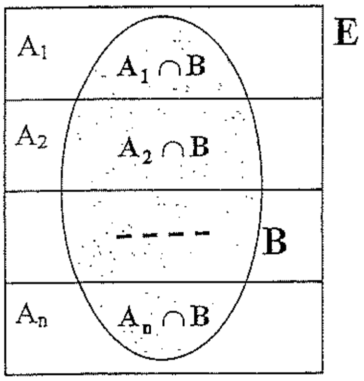
a) $\mathbf{P(M/I)}=\dfrac{P(I\cap M)}{P(I)}=\dfrac{20/100}{55/10}=\dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{55}}$

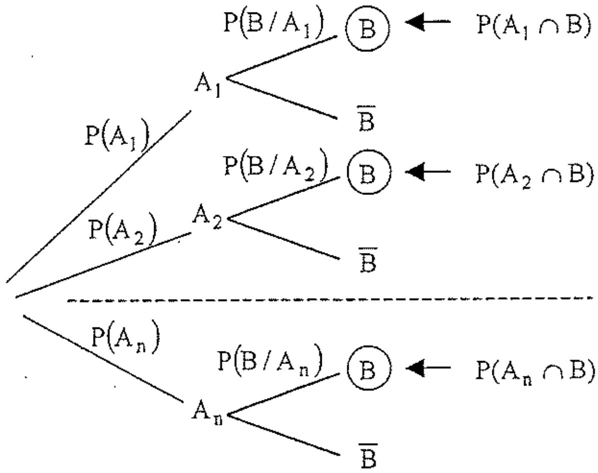
b),c) Hallar $\mathbf{P(\overline{I}/M)}$ y $\mathbf{P(\overline{I}\cap\overline{M})}$ supone trabajar con ***probabilidades totales*** y ***a posteriori*** (ver epígrafe siguiente), sabiendo que:

$$P(M)=\frac{30}{100}$$

PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

Sean A_1, A_2, ..., A_n un sistema completo de sucesos (conjunto de sucesos incompatibles entre sí, que llenan el espacio muestral), y **B** es un suceso cualquiera:





PROBABILIDAD TOTAL:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

O, teniendo en cuenta la probabilidad condicionada:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

TEOREMA DE BAYES:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

O, en forma más desarrollada:

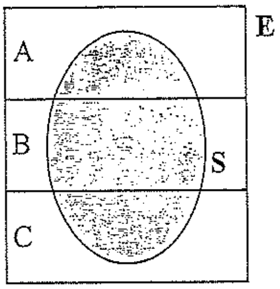
$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

- Las probabilidades $P(A_i)$ se denominan **a priori**
- Las probabilidades $P(B/A_i)$ se denominan **verosimilitudes**
- Las probabilidades $P(A_i/B)$ se denominan **a posteriori**

La *probabilidad total* se halla sumando las probabilidades de los caminos posibles, mientras que la *probabilidad a posteriori* se obtiene dividiendo la probabilidad del camino favorable entre la suma de las probabilidades de los caminos posibles.

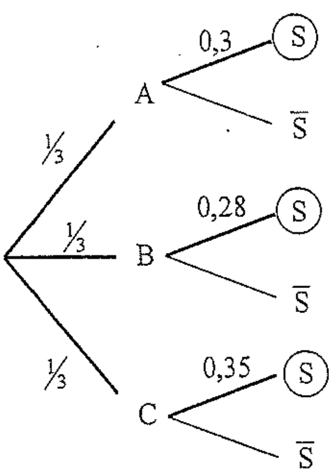
Ejercicio (PAU-2003). *En un I.E.S. hay tres profesores de Física. Cuando un alumno se matricula en el centro tiene igual probabilidad de que le asignen uno u otro profesor de Física. La probabilidad de obtener como nota final un sobresaliente con el profesor A es 0,3; la de obtenerlo con el profesor B es de 0,28; y la de obtenerlo con el profesor C es de 0,35.*

1. *Calcula la probabilidad de que un alumno matriculado en Física obtenga como nota final un sobresaliente.*
2. *Sabiendo que un alumno ha obtenido un sobresaliente como nota final en Física, ¿cuál es la probabilidad de que le hubiesen asignado al profesor C?*



Se cumple:

P(A) = P(B) = P(C) = 1/3
P(S/A) = 0,3
P(S/B) = 0,28
P(S/C) = 0,35



$P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 = 0{,}1$

$P(B \cap S) = P(B) \cdot P(S/B) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}28 = 0{,}093$

$P(C \cap S) = P(C) \cdot P(S/C) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}35 = 0{,}117$

1. Probabilidad total de obtener sobresaliente:

P(S) = suma de las probabilidades de los caminos posibles = 0,1 + 0,093 + 0,117 = **0,31**

2. Probabilidad a posteriori:

P(C/S) = (probabilidad del camino favorable) / (probabilidad total) = 0,117 / 0,31 = **0,377**

UNIDAD 13: PROBABILIDAD

• EJERCICIOS

1. Tenemos una urna con nueve bolas numeradas de 1 al 9. Realizamos el experimento consistente en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: A = "salir un número primo" y B = "salir un número cuadrado".

a) Determina los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$
b) ¿Son compatibles los sucesos A y B?
c) Encuentra los sucesos contrarios de A, B, $A \cup B$ y $A \cap B$
d) Comprueba las leyes de De Morgan

2. Comprueba si la función **P** define una probabilidad en $E = \{A, B, C, D\}$:

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(C) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(D) = \frac{1}{8}$$

3. Sea **P** una probabilidad definida en $E = \{A, B, C\}$. Halla P(A), siendo:

$2 \cdot P(B) = P(A)$ y $P(C) = P(B)$ **[Sol.: 1/2]**

4. Lanzamos un dado octaédrico numerado del 1 al 8. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A = "obtener número par"
b) B = "obtener múltiplo de 3"
c) C = "obtener número menor que cinco"
d) D = "obtener número mayor o igual que seis"

5. Halla la probabilidad de un suceso A, sabiendo que la suma del cuadrado de esta probabilidad y la de su contario es $\frac{3}{4}$. **[Sol.: 1/2]**

6. **(PAU Sep-2001)** Los atletas veteranos de un club de atletismo tienen la siguiente preferencia referente a su participación en distintos tipos de carreras:

- El 70% suele participar en carreras de maratón (42 km. 195 m.)
- El 75% suele participar en carreras de media maratón (21 km. 97,5 m.)
- El 13% no suele participar en estos tipos de carreras.

Se elige al azar uno de estos atletas. Calcula la probabilidad de que:

a) Suela participar en carreras de maratón o de media maratón
b) Suela participar en carreras de maratón y de media maratón
c) Suela participar únicamente en carreras de maratón o únicamente en carreras de media maratón.

7. **(PAU Res2-2001)** La diferencia entre la probabilidad de un suceso M y la probabilidad del contrario de otro suceso N, es $-0,3$. Sabiendo que cuatro veces la probabilidad de M es igual a tres veces la probabilidad de N, y que la probabilidad de la intersección de los sucesos M y N es 0,1, se pide:

a) Probabilidad de que se verifique alguno de los sucesos M o N [Sol.: 0,6]
b) Probabilidad de que se verifique únicamente el suceso M o únicamente el N [Sol.: 0,5]
c) Probabilidad de que no se verifique ninguno de los dos [Sol.: 0,4]
d) ¿Son independientes los sucesos M y N? Razona la respuesta [Sol.: No]

8. **(PAU Sep-2000)** En un experimento aleatorio, se consideran los sucesos A y B. La probabilidad de que no se verifique A es 0,1. La probabilidad de que no se verifique B es 0,4. La probabilidad de que no se verifiquen ni A ni B es 0,04. Halla la probabilidad de que:

1) Se verifique el suceso A o se verifique el suceso B.
2) Se verifique el suceso A y se verifique el suceso B.
3) ¿Son independientes los sucesos A y B?

9. **(PAU Res2-2004)** Sobre 500 alumnos, matriculados en una determinada asignatura, 100 pertenecen al plan antiguo y el resto al plan nuevo. Del plan nuevo aprueban 240 y del plan antiguo aprueban 60. Elegido al azar un alumno que cursa esa asignatura, Calcula la probabilidad de que: **1)** haya aprobado, **2)** pertenezca al plan antiguo. **3)** ¿Son independientes los sucesos "aprobar" y "pertenecer al plan antiguo"? Razónalo. [Sol.: 1) 0,6 2) 0,2 3) Sí]

10. **(PAU Jun-2000)** Se dispone de tres monedas. La 1ª de ellas está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es 0,4. La 2ª moneda tiene 2 cruces, y la 3ª moneda también está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es 0,6. Se pide:

a) Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de estas tres monedas, sucesivamente, en el orden indicado
b) Probabilidad de que se obtengan exactamente 2 cruces
c) Probabilidad del suceso A = "cara, cruz, cara"
d) Probabilidad de obtener, al menos, una cara

11. **(PAU Sep-2006)** En una clase de segundo de bachillerato hay 10 chicos y 10 chicas, la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han optado por la asignatura de Biología, calcular la probabilidad de que, elegido un alumno al azar de esa clase, **1)** sea chico o haya elegido Biología, **2)** sea chica y no haya elegido Biología. [Sol.: 1) 0,75 2) 0,25]

12. **(PAU Jun-2003)** Una caja contiene 10 tornillos, de los cuales tres son defectuosos. Se extraen de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja, 4 tornillos. Calcula la probabilidad de que: **1)** Los cuatro tornillos sean buenos. **2)** Al menos un tornillo, de los cuatro extraídos, sea defectuoso.

13. **(PAU Sep-2004)** En una clase hay 18 chicos y 14 chicas. Un profesor saca a la pizarra, consecutivamente a tres alumnos diferentes. Calcula la probabilidad de que: **1)** saque a tres chicas. **2)** saque a una chica y a dos chicos. [Sol.: 1) 0,073 2) 0,4318]

14. **(PAU Jun-2006)** En una clase de segundo de Bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40% de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase: **1)** ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano? **2)** ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica?
3) Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
]

15. **(PAEG Jun-2014)** En una población, el 40% de los habitantes ven habitualmente la televisión, el 10% leen habitualmente y el 1% ven la televisión y leen habitualmente.

a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la televisión o lea habitualmente o ambas cosas? [**Sol.:** 0,49]

b) Si elegimos un habitante al azar y ve la televisión habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que lea habitualmente? [**Sol.:** 0,025]

16. **(PAU Jun-2004)** En una determinada asignatura hay matriculados 2500 alumnos. En Junio se presentaron 1800, de los que aprobaron 1015, mientras que en Septiembre, de los 700 que se presentaron, suspendieron 270. Elegido al azar un alumno matriculado en esa asignatura: **1)** Calcula la probabilidad de que la haya aprobado. **2)** Si ha suspendido la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de haberse presentado en Septiembre?

17. **(PAU Res2-2006)** Los porcentajes de contenido violento que emite un determinado canal televisivo autonómico en las diferentes franjas horarias es el siguiente. 1% por la mañana, 2% por la tarde y 3% por la noche. Si un telespectador cualquiera sintoniza un día aleatoriamente este canal, con igual probabilidad de franja horaria: **1)** ¿Cuál es la probabilidad de que no vea ningún contenido violento? **2)** Si un telespectador ha visto un contenido violento en ese canal, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido por la mañana? [**Sol.:** 1) 0,98 2) 1/6]

18. **(PAU Jun-2005)** Juan es el responsable de un aula de informática en una empresa y no se puede confiar en él pues la probabilidad de que olvide hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia del jefe es 2/3. Si Juan le hace mantenimiento a un ordenador éste tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento sólo hay una probabilidad de 0´25 de funcionar correctamente. **1)** ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe? **2)** A su regreso, el jefe se encuentra un ordenador averiado, ¿cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?

19. **(PAU Sep-2005)** En una oficina trabajan 4 secretarias que archivan documentos. Cada una de ellas archiva el 40%, 10%, 30% y 20%, respectivamente, de los documentos. La probabilidad que tiene cada una de ellas de equivocarse al archivar es 0´01, 0´04, 0´06 y 0´1, respectivamente. **1)** Cuál es la probabilidad de que un documento esté mal archivado? **2)** Si se ha encontrado un documento mal archivado, ¿cuál es la probabilidad de que sea debido a la tercera secretaria? [**Sol.:** 1) 0,046 2) 0,3913]

20. **(PAEG Jun-2014)** En una empresa hay tres robots (A, B y C) dedicados a soldar productos. El 15% de los productos son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 65% por el C. Se sabe que la probabilidad de que un producto tenga un defecto de soldadura es de 0,02 si ha sido soldado por el robot A, 0,03 por el robot B y 0,01 por el robot C.

a) Elegido un producto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura?

b) Se escoge al azar un producto y resulta tener un defecto de soldadura, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido soldado por el robot A?

APÉNDICE: COMBINATORIA

- Números factoriales y combinatorios
- Tabla de Combinatoria

NÚMEROS FACTORIALES Y COMBINATORIOS

➢ Números factoriales

Si **n** es un número entero mayor que 1, se llama *factorial de* **n**, y se simboliza por **n!**, al producto de los **n** primeros números naturales:

$$\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Por convenio: $0! = 1$ y $1! = 1$

Ej.) $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

➢ Números combinatorios

Se llama ***número combinatorio de índice* m *y orden* n**, y se simboliza por $\binom{m}{n}$, al dado por: $\boxed{\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!\cdot(m-n)!}}$

(Se lee "**m** sobre **n**")

Ej.) $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!\cdot 4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\cdot 4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$

➢ Triángulo de Pascal (o Tartaglia)

Si ordenamos los números combinatorios en filas de arriba abajo, según su índice, y de izquierda a derecha, según su orden, formaremos el triángulo de Pascal. En él, cualquier número se obtiene sumando los dos que tiene encima (los extremos siempre valen la unidad)

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \xrightarrow{\text{Fila 1}} 1 \quad 1$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \xrightarrow{\text{Fila 2}} 1 \quad 2 \quad 1$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \xrightarrow{\text{Fila 3}} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \xrightarrow{\text{Fila 4}} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

....

Propiedades deducidas del triángulo de Pascal:

- $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$
- $\binom{m}{1} = m$
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
- $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$
- $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m$

➤ Tabla de Combinatoria

Dados **m** elementos, podemos formar grupos atendiendo a diferentes criterios:

	VARIACIONES ORDINARIAS: $V_{m,n}$ Calculadora: $\boxed{nPr}$	VARIACIONES CON REPETICIÓN: $VR_{m,n}$	PERMUTACIONES: P_m Calculadora: $\boxed{n!}$	PERMUTACIONES CON REPETICIÓN: $P_m^{a_1, a_2, \ldots, a_n}$	COMBINACIONES: $C_{m,n}$ Calculadora: $\boxed{nCr}$
¿Influye el orden?	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO
¿Intervienen todos los elementos en cada agrupación?	NO	NO	SÍ	SÍ - El 1er elemento se repite a_1 veces - El 2° elemento se repite a_2 veces	NO
¿Pueden repetirse los elementos?	NO	SÍ	NO		NO
Fórmula	$m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)$	m^n	$m! = m \cdot (m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$	$\dfrac{m!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_n!}$	$\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$
Ejemplos	**Elementos:** 1 , 2 , 3 **Grupos de dos elementos:** 12 , 13 , 21 , 23 , 31, 32 **Número de grupos:** $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$	**Elementos:** 1 , 2 , 3 **Grupos de dos elementos:** 11 , 12 , 13 , 21,, 22 , 23 , 31 , 32 , 33 **Número de grupos:** $VR_{3,2} = 3^2 = 9$	**Elementos:** 1 , 2 , 3 **Permutaciones:** 123 , 132 , 213 , 231, 312 , 321 **Número de grupos:** $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$	**Elementos:** 1 , 1 ,2 **Permutaciones:** 112 , 121 , 211 **Número de grupos:** $P_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$	**Elementos:** 1 , 2 , 3 **Grupos de dos elementos:** 12 , 13 , 23 **Número de grupos:** $C_{3,2} = \dfrac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$
Ejercicios	1°) Doce equipos de baloncesto participan en un campeonato. ¿De cuantas formas podrán quedar colocados los tres primeros clasificados al final del campeonato? **Sol: 1.320** 2°) ¿De cuántas maneras se pueden colocar dos anillos diferentes en la misma mano, de modo que no estén en el mismo dedo? **Sol: 20**	3°) ¿De cuántas maneras se pueden colocar dos anillos diferentes en la misma mano, pudiendo estar los dos en el mismo dedo? **Sol: 25** 4°) ¿Cuántas quinielas deberíamos realizar para asegurar el acierto en los quince partidos? **Sol: 14.348.907**	5°) Cinco amigos van al cine y se sientan en una fila que sólo tiene cinco butacas. ¿De cuántas maneras podrán sentarse? **Sol: 120** 6°) En una carrera ciclista se han escapado seis corredores y van haciendo relevos en fila de uno. ¿De cuántas formas pueden ir ordenados en la fila? **Sol: 720**	7°) ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar con cuatro doses y dos treses? **Sol: 15** 8°) ¿De cuántas formas diferentes podemos colocar, en un estante de ocho plazas, tres libros rojos, cuatro negros y uno verde, teniendo en cuenta que los libros del mismo color no se distinguen entre sí? **Sol: 280**	9°) A una reunión acuden catorce personas. Si se intercambian saludos con apretones de manos entre todos ellos, ¿cuántos apretones de manos se han efectuado? **Sol: 91** 10°) De las doce preguntas de que consta una prueba de Biología, se debe contestar a ocho. ¿De cuántas formas podemos elegir esas ocho preguntas? **Sol: 495**

APÉNDICE: COMBINATORIA

EJERCICIOS

1. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse seis personas en una fila de butacas? [Sol.: 720]

2. ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de cuatro en cuatro? [Sol.: 35]

3. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se puede formar con los dígitos del 1 al 6? [Sol.: 360]

4. En una reunión de 20 trabajadores se quiere elegir un comité formado por tres personas. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar? [Sol.: 1.140]

5. ¿Cuántos números de tres cifras distintas, que no empiecen por 0, se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5? [Sol.: 100]

6. En la nevera hay cinco salsas diferentes ¿De cuántas formas se pueden combinar, sabiendo que quiero echar tres salsas en cada plato? [Sol.: 10]

7. Con las cifras 4, 5 y 6, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares? [Sol.: 243 y 162]

8. El sistema Braille se basa en combinaciones de punto en relieve o espacio sin punto, en grupos ordenados de seis posibilidades. ¿Cuántas ordenaciones posibles hay? ¿Son suficientes para las veintisiete letras, diez números y cuatro signos de puntuación básicos? [Sol.: 64]

9. Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:

   a) Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer. [Sol.: 350]
   b) Una mujer determinada debe pertenecer al comité. [Sol.: 150]
   c) Dos hombres determinados no pueden estar juntos en el comité. [Sol.: 210]

10. Con las letras de la palabra **EXAMEN**, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal? [Sol.: 180]

11. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas, que no empiecen por cero, se pueden formar con las cifras pares (el 0 se considera par)? ¿Cuántos de ellos son mayores de 40.000? [Sol.: 96 y 72]

12. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas? [Sol.: 1.260]

13. Si en un colectivo hay 10 asientos vacíos. ¿De cuántas formas pueden sentarse 7 personas? [Sol.: 604.800]

14. ¿Cuál es el número total de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra MATEMATICA? [Sol.: 151.200]

15. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en hilera todas las fichas blancas de ajedrez, si no son distinguibles entre sí las del mismo tipo? (Por ejemplo, los 8 peones). [Sol.: 64.864.800]

16. Una panda de cinco amigos, tres chicas y dos chicos, deciden ir al cine. Si ocupan 5 butacas contiguas, ¿de cuántas maneras se pueden sentar? ¿Y si las tres chicas quieren estar juntas?
[**Sol.:** 120 y 36]

17. ¿Cuántos caracteres se pueden formar con los puntos y rayas del alfabeto Morse, si en cada uno entran hasta 4 de tales elementos?
[**Sol.:** 30]

18. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse usando cuatro de las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si las cifras no pueden repetirse? ¿Cuántos acaban en 45?
[**Sol.:** 360 y 12]

19. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un pentágono regular? ¿Y en un heptágono?
[**Sol.:** 5 y 14]

La Combinatoria es útil en la resolución de problemas de probabilidad cuando se trata de experimentos aleatorios con resultados equiprobables, en los que podemos emplear la Regla de Laplace:

$$Probabilidad = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Ej. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras al tirar tres monedas?
Casos posibles: $VR_{2,3} = 8$ Casos favorables: 3 (cc+, c+c, +cc)

$$Probabilidad = \frac{3}{8} = 0,375$$

20. a) ¿De cuántas maneras pueden hospedarse 6 viajeros en 10 habitaciones individuales?
b) Si los viajeros se han instalado sin saber que 7 de las habitaciones tienen baño, ¿cuál es la probabilidad de que les haya correspondido a cada uno una habitación con baño?
[**Sol.:** a) 151.200 b) 1/30]

21. En una oposición entran 20 temas, de los que salen 3 por sorteo y el opositor escoge uno para contestar. Si un opositor se sabe 7 temas, ¿cuál es la probabilidad de suspender, es decir, que no se sepa ningún tema?
[**Sol.:** 143/570]

22. Se barajan 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea la nº 7?
[**Sol.:** 1/10]

23. Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se sienten juntas?
[**Sol.:** 1/5]

24. Se extraen cinco cartas de una baraja de 40. Hallar la probabilidad de extraer:

a) 4 ases y una sota [**Sol.:** 1/164502]

b) 3 caballos y dos reyes [**Sol.:** 1/27417]

25. (**PAEG Sep-2013**)

En un temario para la oposición a una plaza hay 25 temas, de los cuales 5 son de legislación y el resto del contenido propio de la plaza. Cada opositor elige al azar dos temas. Obviamente, el mismo tema no puede salir dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de los dos temas elegidos, ninguno sea de legislación?
[**Sol.:** 19/30]

b) Si un opositor ha estudiado 10 temas de los 25, ¿cuál es la probabilidad de que, de los dos temas escogidos, al menos uno sea de los que ha estudiado?
[**Sol.:** 7/20]

UNIDAD 14: DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

- Variable Aleatoria
- Distribución de probabilidad para variables aleatorias discretas
- Distribución binomial
- Distribución de probabilidad para variables aleatorias continuas
- Distribución normal
- Aproximación de la binomial a la normal

VARIABLE ALEATORIA

Las distribuciones de probabilidad son modelizaciones de las correspondientes estadísticas de frecuencia. Las *variables estadísticas* de estas dejan paso a las *variables aleatorias* de aquellas.

Sea **E** el espacio muestral correspondiente a un experimento aleatorio. Se llama **variable aleatoria** a toda función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral **E**. Normalmente, las variables aleatorias suelen designarse con letras mayúsculas, mientras que sus valores concretos, con minúsculas.

Ej.) Lanzamos dos monedas. Tomemos como variable aleatoria el número de caras obtenido (**X**)

X (v.a.)

CC ⟶ 2
CX ⟶ 1
XC ⟶ 1
XX ⟶ 0

Recorrido de **X** = { 0 , 1 , 2 }
x_1 x_2 x_3

Una variable aleatoria es **discreta** si tiene un número finito de valores. En caso contrario, se denomina **continua**.

Ej.) - La asignación en cada lanzamiento de un dado del nº que aparece en la cara superior es variable aleatoria discreta.
- La asignación a cada estudiante del valor de su altura es variable aleatoria continua, ya que puede tomar cualquier valor en un cierto intervalo.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Se llama **función de probabilidad** de una variable aleatoria **X** a la función que asocia a cada valor de la variable (x_i) su probabilidad: $f(x_i) = P(X = x_i)$

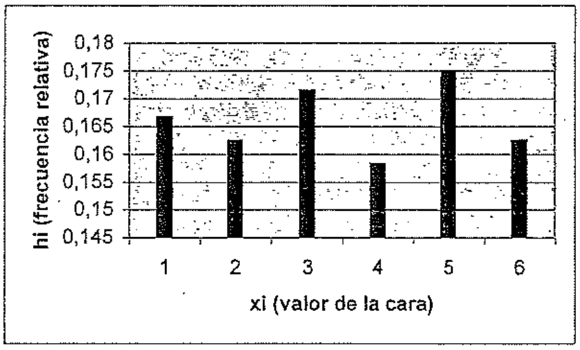
Se llama **distribución de probabilidad** a la enumeración, en forma de tabla o gráfica, de los diferentes valores de la variable aleatoria con sus correspondientes probabilidades.

Ejercicio. *Supongamos que hemos lanzado 240 veces un dado perfecto y hemos obtenido los siguientes resultados:*

cara	1	2	3	4	5	6
nº de veces	40	39	42	38	42	39

- **Resultados obtenidos (distribución estadística de frecuencia):**

x_i (variable estadística)	f_i (frecuencia absoluta)	$h_i = f_i/N$ (frecuencia relativa)
1	40	0,1667
2	39	0,1625
3	42	0,1750
4	38	0,1583
5	42	0,1750
6	39	0,1625
Suma:	**N = 240**	**1**



Parámetros

Media: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{N} = \sum x_i h_i = 3{,}5099$

Varianza: $S^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N} = \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i = \sum x_i^2 h_i - \bar{x}^2 = 2{,}8301$

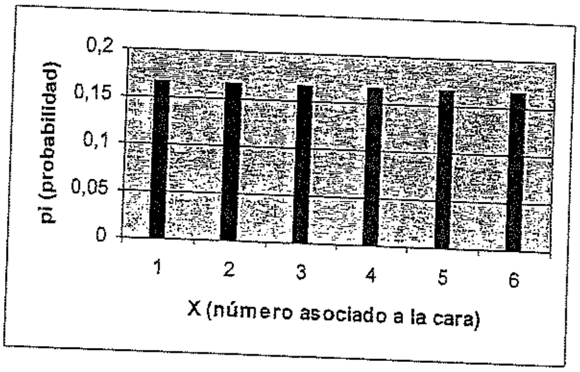
Desviación típica: $S = \sqrt{S^2} = 1{,}6823$

La media aritmética, $\bar{x}$, y la desviación típica, S, son los parámetros estadísticos por antonomasia. La media es la medida central más utilizada, y la desviación típica es la medida de dispersión por excelencia. Para una distribución estadística de comportamiento normal, se verifican de forma aproximada los siguientes porcentajes:

- **En $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ está el 68,27 % del total de datos.**
- **En $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ está el 95,45 % del total de datos.**
- **En $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$ está el 99,73 % del total de datos.**

- **Resultados esperados o teóricos (distribución de probabilidad):**

X (variable aleatoria)	p_i (probabilidad)
1	1/6 = 0,166...
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Suma:	1



Parámetros
- Media (esperanza matemática): $\mu = \sum x_i p_i = 3{,}5$
- Varianza: $\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \sum x_i^2 p_i - \mu^2 = 2{,}916$
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1{,}7076$

Los resultados obtenidos y esperados tienden a confundirse cuando el número de pruebas se hace infinitamente grande.

Ejercicio. *Un juego de azar de la feria de Criptana consiste en ganar doble o nada. La apuesta es de 100 €. Si la probabilidad de ganar es 1/3, ¿interesa jugar desde el punto de vista matemático?¿Cuánto debe valer la probabilidad de ganar para que el resultado fuese favorable al jugador?*

Sea X la variable aleatoria "ganancia". La distribución de probabilidad será:

X (ganancia)	p_i (probabilidad)
0	2/3
200	1/3
Suma:	1

a) Nos interesa calcular la media esperada de las ganancias (esperanza matemática):

$$\mu = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{2}{3} + 200 \cdot \frac{1}{3} = \frac{200}{3} = 66{,}\hat{6} \text{ €.}$$

Como la ganancia esperada es menor que la apuesta, **NO interesa jugar.**

b) Si la probabilidad de ganar fuera **p**, el juego sería favorable al jugador si la ganancia esperada fuese mayor de 100 €:

$$200 \cdot p > 100 \Rightarrow p > \frac{100}{200} \Rightarrow \boxed{p > 0{,}5}$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: B(n,p)

Es una de las distribuciones de probabilidad discretas más utilizadas.

- **Características.**
  - Hay **n** ensayos idénticos.
  - Cada ensayo tiene 2 resultados posible: éxito y fracaso.
  - $\underbrace{\text{P(“éxito”)}}_{p} + \underbrace{\text{P (“fracaso”)}}_{q} = 1$

- **Variable (X):** Describe el nº de éxitos.

- **Parámetros.**
  - **Media:** $\mu = n \cdot p$
  - **Varianza:** $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$
  - **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

- **Función de probabilidad.**

  La probabilidad de **r** éxitos es: $\boxed{P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}}$

Ejercicio. *Un examen de tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas posibles y solo una verdadera. Un estudiante decide contestar al azar a todas ellas.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 5 preguntas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de no acertar ninguna?
c) Calcula el número esperado de respuestas correctas

La variable aleatoria **X = “nº de respuestas correctas”** sigue una distribución binomial: $X = B(10,1/4)$. Por tanto: $n = 10$, $p = 1/4$, $q = 3/4$

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-5} = \mathbf{0{,}0584}$

b) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \mathbf{0{,}0563}$

c) Media (esperanza matemática): $\mu = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} = \mathbf{2{,}5}$

NOTA: El ejercicio se podría hacer por el método convencional de diagrama en árbol, pero no es deseable andarse por las ramas.

TABLA DE DISTRIBUCIONES BINOMIALES: $P(X=r)=\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$

						p					
n	r	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
1	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
2	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
2	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
3	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
3	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
3	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
4	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
4	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
4	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
4	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
5	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
5	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
5	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0679	0.1323	0.1611	0.2304	0.2757	0.3125
5	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0766	0.1128	0.1563
5	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
6	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
6	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
6	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
6	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
6	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
6	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
7	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
7	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
7	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
7	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
7	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
7	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
7	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
8	1	0.2793	0.3826	0.3947	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
8	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
8	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1469	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
8	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1675	0.2322	0.2627	0.2734
8	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
8	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0838	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
8	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
8	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
9	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
9	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2666	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
9	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
9	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
9	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
9	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
9	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
9	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
9	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
10	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1677	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
10	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
10	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
10	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
10	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
10	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
10	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
10	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
10	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
10	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

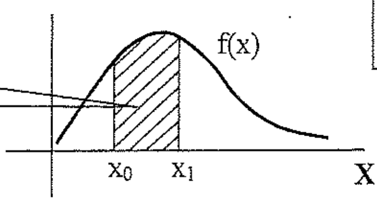
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Una variable aleatoria continua es aquella que tiene un número infinito de valores. El estudio difiere en parte al realizado con las variables aleatorias discretas: la función de probabilidad ya no estaría formada por valores sueltos, sino que sería una curva continua denominada **función de densidad**, en la que el cálculo de probabilidades está siempre asociado a intervalos. Tiene las siguientes propiedades:

> El hecho de no poder asociar a cada valor de una v.a. continua la probabilidad de que éste ocurra, se justifica con la Regla de Laplace: hay ∞ casos posibles ($a/\infty = 0$)

- $f(x) \geq 0$
- El área total bajo la curva es la unidad.
- La probabilidad de que la variable aleatoria **X** tome valores en el intervalo $[x_0, x_1]$ es el área bajo la curva correspondiente a dicho intervalo. Se expresa así:

$$\boxed{P(x_0 \leq X \leq x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}$$



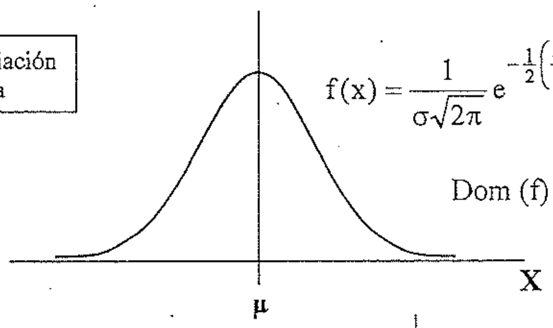
- La probabilidad de que la variable aleatoria **X** tome un valor concreto es cero:

  $P(X = x_0) = 0$ (gráficamente, el área encerrada será nula)

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Es uno de los patrones más frecuentes al estudiar una variable aleatoria continua. Se representa por $N(\mu, \sigma)$ y tiene forma de campana (*campana de Gauss*):

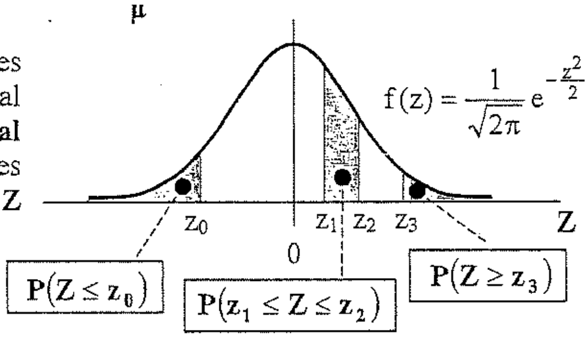
media | desviación típica



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dom (f) = **R**

Entre todas las distribuciones normales, hay una de interés especial denominada **distribución normal estándar: N(0,1)**. Su gran ventaja es que está tabulada. Se suele utilizar la **Z** en lugar de la **X**.

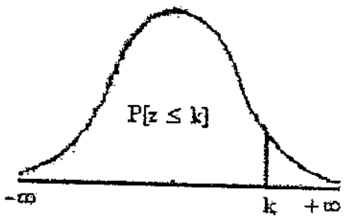


$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

➢ Tablas para la N(0,1).

Obtenemos en ellas: $P(Z \leq k)$, con k>0. En la PAU os darán la siguiente tabla:

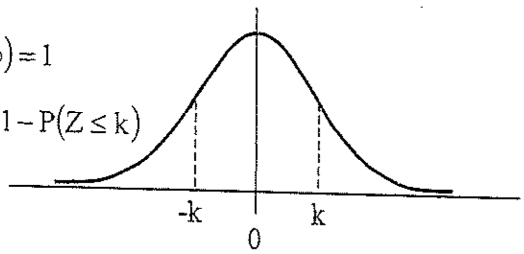
TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6065	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9157	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Para hallar otros casos, hemos de tener en cuenta:

- El área encerrada es la unidad: $P(-\infty < Z < +\infty) = 1$
- La gráfica es simétrica: $P(Z \leq -k) = P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k)$
- $P(k_1 \leq Z \leq k_2) = P(Z \leq k_2) - P(Z \leq k_1)$



Ejemplos:

$\mathbf{P(Z \leq -3{,}24)} = P(Z \geq 3{,}24) = 1 - P(Z \leq 3{,}24) = 1 - 0{,}9994 = \mathbf{0{,}0006}$

$\mathbf{P(Z \geq -0{,}96)} = P(Z \leq 0{,}96) = \mathbf{0{,}8315}$

$\mathbf{P(1{,}65 \leq Z \leq 2{,}03)} = P(Z \leq 2{,}03) - P(Z \leq 1{,}65) = 0{,}9788 - 0{,}9505 = \mathbf{0{,}0283}$

$\mathbf{P(-1{,}27 \leq Z \leq 1{,}66)} = P(Z \leq 1{,}66) - P(Z \leq -1{,}27) = P(Z \leq 1{,}66) - [1 - P(Z \leq 1{,}27)] = \mathbf{0{,}8495}$

- **Tipificación de la variable.**

Para calcular probabilidades en una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, la reducimos a una $N(0,1)$ mediante el siguiente cambio de variable: $\mathbf{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$. Por tanto:

$$P(X \leq x_0) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right), \text{ donde } \begin{cases} X = N(\mu, \sigma) \\ Z = N(0,1) \end{cases}$$

Quitamos μ y dividimos entre σ para pasar a media 0 y desviación típica 1

Ej.) *Sea* $\mathbf{X = N(10{,}2)}$. *Calcula* $\mathbf{P(X \leq 11)}$

Hacemos $Z = \frac{X - 10}{2}$ y convertimos la distribución en una N(0,1). Por tanto:

$$\mathbf{P(X \leq 11)} = P\left(Z \leq \frac{11-10}{2}\right) = P(Z \leq 0{,}5) = \mathbf{0{,}6915}$$

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL

La distribución binomial B(n,p) puede a proximarse a la normal $N(\mu, \sigma)$, sin más que tomar: $\boldsymbol{\mu = n \cdot p}$, $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$. La bondad de la aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea **n** y cuanto más próximo esté **p** de 0,5.

Esta aproximación está especialmente indicada si: $n \cdot p \geq 5$, $n \cdot q \geq 5$

CORRECCIÓN DE YATES.

Cuando aproximamos una distribución binomial mediante una normal, estamos convirtiendo una variable discreta en una continua y, en ese caso, la probabilidad para valores concretos de la variable es cero.

Yates estudió el problema y consideró que una buena aproximación para obtener probabilidades en valores concretos de la variable, siendo esta continua, era tomar un intervalo centrado en el valor y de longitud unidad. Es decir, $P(X = a) \cong P(a - 0{,}5 \leq X \leq a + 0{,}5)$

Ejercicio. *Según un estudio estadístico se sabe que el 30% de la población prefiere un determinado canal televisivo. Elegidas 100 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 40 de ellas prefieran dicho canal? ¿Y la probabilidad de que lo prefieran más de 40 personas?*

a) Sea X = "nº de personas que prefieren el canal" la variable aleatoria, que sigue una distribución binomial: $X = B(100;0{,}3)$. Por tanto:

$$\boxed{P(X=40)=\binom{100}{40}\cdot 0{,}3^{40}\cdot 0{,}7^{60}=\mathbf{0{,}00849}}$$

Como $n\cdot p = 100\cdot 0{,}3 = 30 \geq 5$ y $n\cdot q = 100\cdot 0{,}7 = 70 \geq 5$, vamos a resolver este apartado utilizando la aproximación de la binomial a la normal:

$$\mathbf{X = B(100;0{,}3)} \cong N\left(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot q}\right) = N\left(30, \sqrt{21}\right) \cong \mathbf{N(30;4{,}58)}.$$

Por tanto:

$$\boxed{P(X=40)} \underset{\text{Yates}}{\cong} P(39{,}5 \leq X \leq 40{,}5) \underset{\text{Tipificación}}{=} P\left(\frac{39{,}5-30}{4{,}58} \leq Z \leq \frac{40{,}5-30}{4{,}58}\right) =$$

$$= P(2{,}07 \leq Z \leq 2{,}29) = P(Z \leq 2{,}29) - P(Z \leq 2{,}07) = 0{,}9890 - 0{,}9808 = \boxed{\mathbf{0{,}0082}}$$

b) Utilizamos la aproximación normal: $\mathbf{N(30;4{,}58)}$

$$\boxed{P(X>40)} = P\left(Z > \frac{40-30}{4{,}58}\right) = P(Z > 2{,}28) = 1 - P(Z \leq 2{,}28) = 1 - 0{,}9887 = \boxed{\mathbf{0{,}0113}}$$

UNIDAD 14: DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

EJERCICIOS

1. En el conocido programa de televisión *¿Quieres ser millonario?* un concursante ha contestado bien la pregunta de los 6.500 € y va por la de 10.000 €. Si falla, ganaría los 1.000 € que tiene asegurados. Si se planta, se quedaría con 6.500 €. Si acierta, obtendría 10.000 €. Considerando que hay 4 opciones, y sabiendo que la respuesta correcta está entre dos de ellas, ¿qué le interesa más, contestar o plantarse?

[**Sol.:** Plantarse]

2. Tiramos 3 monedas. Sea **X** la variable aleatoria "número de caras". Obtén una tabla con las probabilidades asociadas a cada valor de **X** (distribución de probabilidad) y los parámetros asociados (media y desviación típica) por dos procedimientos:

a) Basándote en un diagrama en árbol para asociar probabilidades.
b) Considerando que **X** sigue una distribución binomial.

3. **(PAU Res2-2003)** Las cinco preguntas de un determinado cuestionario tienen 4 alternativas de respuesta de las que sólo una es correcta. Si alguien contesta al azar, calcula la probabilidad de:

1) Acertar las cinco preguntas. [**Sol.:** 0,0010]
2) Acertar tres preguntas y fallar las otras dos. [**Sol.:** 0,0879]

4. **(PAU Res1-2004)** La probabilidad de que un niño en edad escolar tenga trastornos de conducta es 0,2. Elegidos al azar tres niños en edad escolar, calcula la probabilidad de que:

1) ninguno de los tres tenga trastornos de conducta.
2) más de uno tenga trastornos de conducta.

5. **(PAU Sep-2005)** Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Si se lanza tres veces esta moneda. **1)** Calcula el espacio muestral para este experimento. **2)** Calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara. [**Sol.:** 2) 0,2222]

6. Un jugador de baloncesto acierta siete de cada diez lanzamientos. Si lanza a canasta cinco veces, ¿qué probabilidad tiene de encestar tres de los lanzamientos? ¿Y de que enceste al menos tres lanzamientos?

7. El 10% de las bombillas de las farolas que iluminan una ciudad se funde antes de un año. Si esta ciudad tiene mil bombillas, calcula el número medio de bombillas que deben ser reemplazadas y la varianza.

[**Sol.:** $\mu = 100$; $\sigma^2 = 90$]

8. Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal N(50,10), halla:

a) $P(X \leq 55)$ b) $P(X \geq 58)$ c) $P(X \geq 45)$ d) $P(X \leq 45)$ e) $P(45 \leq X \leq 65)$

9. Un equipo de baloncesto ha obtenido en los últimos años unos resultados que se distribuyen normalmente con una media de 23 victorias y una desviación típica de seis. Encuentra qué probabilidad hay de que en la presente temporada gane entre 22 y 27 partidos. [Sol.: 0,3161]

10. Se sabe que la vida media de un electrodoméstico es de 10 años con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la vida del electrodoméstico sigue una distribución normal, calcula:

a) La probabilidad de que un electrodoméstico dure más de nueve años
b) La probabilidad de que dure entre 9 y 11 años

11. Un tirador de dardos acierta 8 de cada diez lanzamientos. Encuentra la probabilidad de que de 50 lanzamientos acierte 45:

a) Utilizando la distribución binomial [Sol.: 0,0295]
b) Utilizando la aproximación de la binomial a la normal y la corrección de Yates [Sol.: 0,0297]

12. Se ha comprobado que el 70% de los alumnos de segundo de bachillerato acaban el curso en junio. Si se elige una muestra de 200 alumnos de segundo de bachillerato al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 150 acaben el curso en junio?¿Y de que exactamente 150 acaben el curso en junio?